Tomo XIII 15 de Marzo Núm. 86

ANALES DEL INSTITUTO DE INJENIEROS

DETERMINACION

de las coordenadas jeográficas de algunas ciudades de la provincia de Aconcagua

(Continuacion)

ALTURAS CORRESPONDIENTES

Si se toma la altura de una estrella conocida, ántes i despues de su paso por el meridiano, cuando vuelve a tener la misma altura i se anota la hora que marcaba el reloj en cada uno de esos instantes, se tendrá la hora del paso de esa estrella por el meridiano. Si se toma el término medio de las horas que marcaba el reloj en las dos observaciones, se obtendrá inmediatamente la correccion comparando supone quedicho término medio con la ascension recta de la estrella. En esto se el reloj tenga una marcha regular.

Considerando el triángulo esférico determinado por el polo el zenit i la estrella, se tendrá en él, llamando ϕ la latitud del lugar d, la declinacion del astro i h, la altura; ademas sean t i t' los ángulos horarios.

Apliquemos la fórmula fundamental de la trigonometria esférica, lo que nos dará: $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} d + \cos \varphi \cos d \cos t$; para la altura correspondiente, se tendrá (fig. 14):

sen h = sen ϕ sen d — cos ϕ cos d cos t′; de aquí deducimos: t = — t′; esto significa que las alturas se han tomado en ánglos horarios iguales a uno i otro lado del meridiano i a partir de este último.

Designemos por u la hora del reloj en el momento de la observacion de la mañana i por u' la que marcó en la tarde. Tendremos que $\frac{u + u'}{2}$ es la hora correspondiente al paso de la estrella por el meridiano; esta hora deberá corresponder a la ascencion recta de la estrella, i si no son iguales, la diferencia dará el estado del reloj.

Llamando a la ascencion recta, el estado del reloj se esperesará por:

$$E = a - \tfrac{1}{2}(u + u')$$

Este método es el mas seguro para determinar la hora por observaciones de alturas, tiene ademas, la ventaja de que no se necesita conocer la latitud del lugar de observacion ni la declinacion de la estrella; no es necesario conocer tampoco, la diferencia de lonjitud respecto del meridiano que ha servido de oríjen para calcular las esfeméricas que dan las ascenciones rectas de las estrellas.

Este método es el mas práctico para determinar la hora, en lugares cuya posicion jeográfica es desconocida o que tan solo se conoce aproximadamente.

Otra ventaja de este método, consiste en que la altura misma no entra en el cálculo. Solo se necesita un buen cronómetro que tenga una marcha uniforme en el intervalo de las dos observaciones i un instrumento cualquiera, que sirva para tomar alturas.

Mas exactos resultados se obtendrán practicando una série de observaciones de la misma estrella a uno i a otro lado del meridiano, tomando en seguida el término medio de los resultados, para compararlo con la ascencion recta.

Cuando el astro tiene una declinacion variable, el promedio de los tiempos de las dos observaciones, no corresponde a la hora del paso del astro por el meridiano.

Si la declinacion va aumentando positivamente, es decir, cuando el astro se aproxima al polo norte, el ángulo horario correspondiente a la altura de la tarde, será mayor que el correspondiente a la de la mañana. Sucede al contrario, si el astro va acercándose al polo sur, o lo que es lo mismo si su declinacion disminuye. Hai, por consiguiente, lugar a aplicar una correccion que depende del cambio de declinacion durante el tiempo trascurrido entre las dos alturas i que se llama *correccion del medio dia*, cuando se aplica al sol

Veamos ahora como se determina *la correccion del medio dia*.

Llamemos d la declinacion del sol a medio dia medio;

$\triangle d$, la variacion de declinacion, desde el medio dia medio hasta el momento en que se han verificado cada una de las observaciones.

En las dos fórmulas:

$$(1) \qquad \text{sen h} = \text{sen } \phi \text{ sen } d + \cos \phi \cos d \cos \text{t}.$$

$$(2) \qquad \text{sen h} = \text{sen } \phi \text{ sen } d - \cos \phi \cos d \cos \text{t}'$$

introduzcamos la variacion de declinacion $\triangle d$ tendremos:

$$(3) \qquad \text{sen h} = \text{sen } \phi \text{ sen } (d - \triangle d) + \cos \phi \cos (d - \triangle d) \cos \text{t}$$

$$(4) \qquad \text{sen h} = \text{sen } \phi \text{ sen } (d + \triangle d) + \cos \phi \cos (d + \triangle d) \cos \text{t}'.$$

Hemos llamado u, la hora del reloj para la observacion de la mañana i u', la de la tarde. Si la declinacion hubiese permanecido constante se tendria para la hora del paso del sol por el meridiano, llamando U este valor: $U = \frac{1}{2}(u' + u)$. Este valor U es el que se llama *medio dia no correjido.*

Llamando 2 T, el tiempo trascurrido, entre las dos observaciones, es decir: $2\,T = u' - u$, i agregando 24^h a u' si fuera necesario para que la sustraccion sea posible, tendremos que la mitad del tiempo trascurrido, T, entre las dos observaciones, será:

$$T = \tfrac{1}{2}(u' - u).$$

Designemos por E la correccion del medio dia. El instante del medio dia verdadero se espresará por $U + E$.

Los ángulos horarios t i t' serán entónces:

$$t = \tfrac{1}{2}(u' - u) + E = T + E$$

$$t' = \tfrac{1}{2}(u' - u) - E = T - E$$

Introduzcamos los valores t i t' en las ecuaciones (3) i (4):

$$\text{sen } h = \text{sen } \phi \text{ sen } (d - \Delta d) + \cos \phi \cos (d - \Delta d) \cos (T + E)$$

$$\text{sen } h = \text{sen } \phi \text{ sen } (d + \Delta d) + \cos \phi \cos (d + \Delta d) \cos (T - E)$$

Igualando los segundos miembros, se tendrá:

$$0 = \text{sen } \phi \cos d \text{ sen } \Delta d - \cos \phi \text{ sen } d \text{ sen } \Delta d \cos T \cos E + \cos \phi \cos \Delta d \text{ sen } T \text{ sen } E$$

En las observaciones de sol, los valores de E son siempre pequeños, será permitido reemplazar el cos de E por uno i el seno por E; luego se tendrá:

$$\text{sen } \phi \cos d \text{ sen } \Delta d - \cos \phi \text{ sen } d \text{ sen } \Delta d \cos T + E \cos \phi \cos \Delta d \text{ sen } T \cos d = 0.$$

$$E = \frac{\cos \phi \text{ sen } d \text{ sen } \Delta d \cos T - \text{sen } \phi \cos d \text{ sen } \Delta d}{\cos \phi \cos \Delta d \text{ sen } T \cos d}$$

$$E = \text{tanj } \Delta d \, \frac{\cos \phi \text{ sen } d \cos T - \text{sen } \phi \cos d}{\cos \phi \cos d \text{ sen } T}$$

$$E = \text{tanj } \Delta d \left(\frac{\text{tanj } d}{\text{tanj } T} - \frac{\text{tanj } \phi}{\text{sen } T} \right)$$

Poniendo Δd en lugar de tanj Δd;

$$(5) \ldots\ldots\ldots \quad E = - \left(\frac{\text{tanj } \phi}{\text{sen } T} - \frac{\text{tanj } d}{\text{tanj } T} \right) \Delta d$$

Si u, representa la variacion de declinacion en 48 horas i que la declinacion varie proporcionalmente al tiempo, es decir, que la variacion por hora sea constante, $\frac{u}{48}$, será la variacion por una hora; luego, la variacion $\triangle d$, en el tiempo T, será:

$$\triangle d = \frac{u}{48} T$$

Reemplazando $\triangle d$ por este valor en la fórmula (5), se tiene:

$$E = \frac{u}{48} T \left(- \frac{\tan \phi}{\text{sen } T} + \frac{\text{tanj } d}{\text{tanj } T} \right)$$

$$E = \frac{u}{48} \left(- \frac{T}{\text{sen } T} \text{tanj } \phi + \frac{T}{\text{tanj } T} \text{tanj } d \right),$$ dividiendo por 15 para espresar E en segundos de tiempo:

$$E = \frac{u}{720} \left(- \frac{T}{\text{sen } T} \text{tanj } \phi + \frac{T}{\text{tanj } T} \text{tanj } d \right)$$

Para facilitar este cálculo, existen tablas que han sido publicadas, en primer lugar por Gauss, éstas dan, con el argumento T, o sea la mitad del tiempo trascurrido entre las dos observaciones, las cantidades:

$$\frac{1}{720} \cdot \frac{T}{\text{sen } T} = A \text{ i };$$

$$\frac{1}{720} \cdot \frac{T}{\text{tanj } T} = B. ;$$

de este modo la fórmula para la correccion del medio dia se simplifica i reduce a:

(6)............. $E = - u \text{ tanj } \phi . A + u \text{ tanj } d \, B$. Nosotros no nos hemos servido de las tablas indicadas anteriormente, sino de las tablas publicadas en el *Boletin de la Sociedad de Injeniería*, correspondiente al 1.° de Marzo de 1895, por el astrónomo 1.° del Observatorio de Santiago, don Juan Taulis. La teoría que ahí se espone, es le misma anterior; sin embargo, trascribiremos los cálculos que allí se desarrollan.

Tomemos la fórmula fundamental:

$$\text{sen h} = \text{sen } d \text{ sen } \phi + \cos d \cos \phi \cos \text{H}.$$

Diferenciando esta fórmula i suponiendo h constante, nos dará:

$$0 = \cos d \text{ sen } \phi \text{ d. } d - \text{sen } d \cos \phi \cos \text{H d. } d - \cos d \cos \phi \text{ sen H d. H}.$$

Despejando d. H i haciendo las reducciones, será:

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{d. H} = \left(\frac{\text{tanj } \phi}{\text{sen H}} - \frac{\text{tanj } d}{\text{tanj H}}\right) \text{d. } d.$$

Llamando $\triangle d$ el incremento de la declinacion del sol en el tiempo que trascurre entre las dos observaciones i siendo $\triangle d$ una cantidad pequeña, reemplacemos este valor en lugar de d. d i d. H. por $\triangle$ H, se obtendrá:

$$\triangle \text{H} = \left(\frac{\text{tanj } \phi}{\text{sen H}} - \frac{\text{tanj } d}{\text{tauj H}}\right) \triangle d.$$

Como la correccion que se busca es para el ángulo horario determinado por la semi-diferencia de los correspondientes a cada observacion, se tendrá que la correccion:

$$\text{E} = -\frac{\text{H}_2 - \text{H}}{2} = -\frac{\triangle \text{H}}{2}; \text{ luego la fórmula será:}$$

$$(8)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\triangle \text{H}}{2} \text{ E} = \left(-\frac{\text{tanj } \phi}{\text{sen H}} + \frac{\text{tanj } d}{\text{tanj H}}\right)\frac{\triangle \text{d}}{2}$$

En esta fórmula se tomará para la declinacion del sol, el valor que le corresponda en el momento de su paso por el meridiano; el que se obtiene por medio de las esfemérides.

Se tomará igualmente para el ángulo horario correspondiente,

$H = \frac{H_2 - H_1}{2} = \frac{T_2 - T_1}{2}$; en que T_1 es la hora qne marcó el reloj en la altura de la mañana i T_2 la que marcó en la tarde.

Haciendo $T_2 - T_1 = T$;

$H = \frac{T}{2}$; este valor estaria espresado en horas, para espresarlos en grados se multiplicaria por 15° que es lo que le corresponde a una hora i se tendrá:

$$H = \frac{T}{2} \times 15° = \frac{T}{30}$$

Como $\triangle d$ es la variacion de declinacion del sol en el intervalo de las dos observaciones, si llamamos d la variacion en una hora, se tendrá: $\triangle d = (T_2 - T_1)\, d = T.\, d$; reemplazando en la fórmula (8) los valores de H i de $\triangle d$, se tiene:

$$(9)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad E = \left(\frac{\text{tanj}\, d}{\text{tanj}\left(\frac{T}{2} \times 15°\right)} - \frac{\text{tanj}\, \varnothing}{\text{sen}\left(\frac{T}{2} \times 15°\right)} \right) \frac{T.\, d}{30}$$

$$\text{Haciendo en (9), } A = \frac{\text{tanj}\, d}{\text{tanj}\left(\frac{T}{2} \times 15°\right)} \cdot \frac{T}{30}$$

$$\text{i} \quad B = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{T}{2} \times 15°\right)} \cdot \frac{T}{30},$$

dicha fórmula se reducirá a $E = A + B\, d\, \text{tanj}\, \varnothing$.

Estos valores de A i B, calculados en tablas por el señor Taulis, son los que nos han servido para la determinacion de la hora por alturas correspondientes de sol.

Veamos, ahora, por medio de un ejemplo, como se hace aplicacion de este método.

Siempre hemos practicado séries a ámbos lados del meridiano i hemos tomado en seguida el término medio, para calcular así, la que se aproximaba mas al valor medio jeneral.

El dia 17 de Febrero de 1897, se observaron en Ligua, sobre el pilar que servia de observatorio, ubicado en la Estacion del Ferrocarril, las siguientes alturas correspondientes:

Instrumento....... Teodolito Troughton....... Cronómetro Leroy No. 692

☉ Distancia zenital doble (Limbo superior)	Hora del reloj en la mañana	Hora del reloj en la tarde	Promedio $T_1 + T_2$
	T_1.	T_2.	
	h. m. s.	h. m. s.	h. m. s.
Z = 49° 39′.30″	20 55 24,50	3. 32. 52,50	24 28 17,00
,, 30′ 00″	,, 56 10,50	32. 6,50	,, 28 17,00
,, 25′ 30″	,, 56 33,75	31. 42,75	,, 28 16,50
,, 20′ 30″	,, 56 57,25	31. 20,25	,, 28 17,50
,, 15′ 30″	,, 57 21,75	30. 56,00	,, 28 17,75
,, 10′ 20″	,, 57 45,50	30. 31,75	,, 28 17,25
,, 5′ 10″	,, 58 12,50	30 6,00	,, 28 18,50
48° 58′ 20″	,, 58 45,00	29. 33,00	,, 28 18,00
,, 53′ 00″	,, 59 10,50	29. 6,50	,, 28 17.00

Sumando los segundos del promedio i dividiendo por nueve, se tiene: $24^h\ 28^m\ 17^s,34$; tomemos la mitad i tendremos que el medio dia no correjido, tuvo lugar cuando el reloj marcó $0^h\ 14^m\ 8^s,67$.

Tomando el valor que se aproxime mas, se ve que seria necesario calcular con las horas de las alturas cuarta i sesta; pero se evita este doble cálculo, sumando las dos horas de la mañana i las dos de la tarde i dividiendo las sumas respectivas por dos. Así se tendrá para la obeservacion de la mañana:

$$T_1 = 20^h\ 57^m\ 21^s,37$$

para la de la tarde:

$$\begin{array}{rl} T_2 = & 3 \quad 30 \quad 56{,}00 \\ \hline T_1 + T_2 = & 24^h\, 28^m\, 17^s{,}37 \end{array}$$

$$\frac{T_1 + T_2}{2} = 0^h\, 14^m\, 8^s{,}685.$$

La hora del paso del sol por el meridiano, correjida, es dada por la fórmula:

$$To = \frac{T_1 + T_2}{2} + E$$

Como $E = A + B\, d$ tanj φ: calcularemos E con ayuda de las tablas. Las cantidades A i B, tienen por argumento el tiempo trascurrido entre las dos observaciones, por consiguiente será preciso determinar primero $T = T_2 - T_1$; para lo que agregaremos a T_2 24 horas i se tendrá:

$$T = 27^h\, 30^m\, 56^s{,}00 - 20^h\, 57^m\, 21^s{,}37.$$

$$T = 6^h\, 33^m\, 34^s{,}63.$$

La tabla I. da para el dia 10 de Febrero i para:

	$T = 6^h\, 20^m$	$A = -2^s{,}39$
para	$T = 6^h\, 40^m$	$A = -2^s{,}30$
diferencia para	20^m	$= +0^s{,}09$
id. id.	1^m	$= 0^s{,}0045$
id. id.	$13^m{,}5$	$= 0^s{,}061$; restando

este valor al de A, para $6^h\, 20^m$, se tiene el valor de A para el dia 10 de Febrero: $T = 6^h\, 33^m\, 30^s$.

Calculando del mismo modo, obtendremos el valor de A, para el 20 de Febrero $= -1^s{,}944$.

Hagamos ahora la diferencia entre los dos valores de A, obtenidos i tendremos:

$2^s{,}399 - 1^s{,}944 = 0^s{,}395$; esta es la variacion de A para diez días; para un dia es de $0^s{,}0395$ i para siete, $7 \times 0^s{,}0395 = 0^s{,}276$.

Como los valores de A van disminuyendo, restaremos esta cantidad a la obtenida para el dia 10 de Febrero, lo que da finalmente para el 17 de Febrero; $A = -2^s,339 + 0^s,276$

$$A = -2^s,063$$

En la tabla III, se obtendrá:

$$\log B = -\bar{1},4606;\text{ en la tabla IV,}$$
$$\log d = +1,7270.$$

Latitud de Ligua, $\phi = -32^\circ\ 27'\ 19'',97.$

Con estos datos calcularemos E, como sigue:

$$\log B = -\bar{1},4606$$
$$\log d = +1,7220$$
$$\log \text{tanj}\ \phi = -\bar{1},8034$$

$\log(B.\ d.\ \text{tanj}\ \phi) = +0,9860$; buscando el número correspondiente a este logaritmo, se tiene: $B\ d\ \text{tanj}\ \phi = +9^s682$, luego el valor de E será:

$$E = -2^s,063 + 9^s,682 = +7^s,719$$

$$\text{i } T_{\shortparallel} = 0^h\ 14^m\ 8^s,685 + 7^s,619.$$

La hora observada con el cronómetro, del paso del sol por el meridiano de Ligua, será: $T_0 = 0^h\ 14^m\ 16^s,304$.

Calculemos ahora la correccion del reloj para el medio dia del 17 de Febrero de 1897 en la ciudad de la Ligua.

El Conocimiento de los Tiempos para 1897 da: tiempo medio a medio dia verdadero de Paris el dia 17 de Febrero $= 0^h\ 14^m\ 10^s,31$; variacion para una hora $= -0^s,208$.

La lonjitud de Ligua, espresada en horas i fraccion de horas, es: $L. = 4^h,90$.

Como la Ligua está al oeste de Paris, i la ecuacion del tiempo va disminuyendo, tendremos que el tiempo medio a medio dia verdadero de Ligua, se obtendrá calculando del modo siguiente:

Tiempo medio a medio dia verdadero de Paris = $0^h\ 14^m\ 10^s,31$.
Variacion por hora = $-0^s,208$.

Variacion por $4^h,90$; lonjitud Oeste de Ligua respecto a Paris:

$$= -1^s,02.$$

Tiempo medio a medio dia verdadero de Ligua = $0^h\ 14^m 9^s,290$.

Hora del cronómetro Leroy 692 a M. *d.* V. en id. = 0,14.16,304
Diferencia = $7.^s014$.

Estado de Leroy = + $7.^s014$.

Luego el cronómetro estaba adelantado a medio dia verdadero del 17 de Febrero de 1897 en $7^s,014$.

DETERMINACION DE LA HORA POR EL PASO DE LAS ESTRELLAS POR EL MERIDIANO

Si se observa una estrella en su paso por el meridiano i se anota en ese instante la hora que marca el reloj, se obtendrá inmediatamente la correccion o estado del reloj; comparando el tiempo que marcaba en ese instante con la ascencion recta de la estrella, tomada de una de las efemérides, Connaissance des Temps o Nautical Almanac, los que dan estos valores de diez en diez dias para todos los meses del año, para 382 estrellas fundamentales.

Si se dispone de un buen cronómetro de marcha regular, haciendo una série de observaciones diarias, se obtendrá dia a dia el andar del reloj i para un instante cualquiera, la correccion correspondiente. Las observaciones se practicarán con un reloj de tiempo sideral o si se hace con uno de tiempo medio, se trasformará para la comparacion una hora en otra.

Como la observacion ha de practicarse en el meridiano astronómico, toda la atencion del observador se concretará a hacer que el anteojo del teodolito describa dicho plano i a determinar las correcciones que deben aplicarse a las observaciones a causa de los errores instrumentales.

Veamos en que consisten estos errores i los medios de determinarlos i anularlos en los resultados.

1.° INCLINACION.

El eje de rotacion del anteojo deberá ser exectamente horizontal, si esta condicion no se cumple, hai que correjir las observaciones por el error que de esto proviene i que se llama: *error de inclinacion.*

El nivel de aire sirve para hallar la inclinacion de una línea con respecto al horizonte.

Como al teodolito acompaña un nivel de aire, que es independiente del instrumento mismo, i que es formado por dos soportes perpendiculares al tubo que contiene el nivel i construido de modo que la parte inferior de estos soportes pueda descansar en la estremidad de los muñones del eje horizontal del anteojo, se podrá determinar por medio de él la inclinacion. A este nivel se llama nivel superior i se puede quitar o poner a voluntad.

Si los pies o soportes del nivel que descansan sobre el eje de rotacion del anteojo fuesen exactamente iguales, el nivel daria inmediatamente la inclinacion, cuando se conozca el valor de cada una de sus divisiones, espresadas en segundos de arco.

Jeneralmente los soportes no tendrán la misma lonjitud i la lectura del nivel no dará inmediatamente el valor de la inclinacion.

Veamos como se obtiene la verdadera inclinacion por medio de este nivel. (Fig. 15.)

Sea A B el nivel, cuya lonjitud llamaremos L; $A\,C$ i $B\,D$, las lonjitudes de los dos soportes i que designaremos por a i b. Partamos de la base de que el nivel esté colocado sobre una línea que no sea horizontal y que forme con el horizonte un ángulo a, ademas, que el estremo mas elevado sea ocupado por el soporte B D. Llamemos c la la distancia del estremo C, del soporte A C al horizonte. La altura del estremo A del nivel será

Alt. de $A = a + c$
Alt. de $B = b + c + dD$; $Dd = L \tan j\, a$
Alt. de $B = b + c + L \tan j\, a$

Sea X el ángulo formado por la línea A B del nivel i el horizonte; *h* la altura del estremo *B*, con respecto a la horizontal que pasa por el estremo A; tendremos: h = Alt de B — Alt de A. Reemplazando *B* i *A* por sus valores:

$Z = b + c\, L \tan j\, a - (a + c)$
$Z = b + c\, L \tan j\, a - a - c$
$Z = b + L \tan j\, a - a$; pero tambien se tiene:
$Z = L \tan j\, X$, i reemplazando:
$L \tan j\, X = b - a + L \tan j\, a$
$$\tan j\, X = \frac{b - a + L \tan j\, a}{L}$$

$\tan j\, X = \frac{b - a}{L} + \tan j\, a$. Como los ángulos *a* i X son mui pequeños, cuando mas algunos minutos; podremos reemplazar las tanjentes de *a* i X por *a* i X solamente, lo que nos dará para el valor de la inclinacion: (Fig. 16)

$$X = a + \frac{b - a}{L}$$

Invirtiendo en seguida el nivel, de modo que el estremo *B* pase a A i llamando X′ el ángulo formado por *A B* i el horizonte, obtendremos practicando un cálculo análago al anterior:

$$X' = a - \frac{b - a}{L}$$

Como el cero puede estar marcado inexactamente, las divisiones del nivel no darán exactamente la verdadera lectura de la inclinacion en las dos posiciones. Hagamos entrar en el cálculo esta consideracion i supongamos que esté marcado mas próximo a *B* que a *A* en la cantidad $\hbar$, entonces, si suponemos que el nivel está horizontal, se tendrán las siguientes lecturas, designando con 2 l la lonjitud de la burbuja de aire.

En el estremo A, será: $l + \hbar$

En el estremo B, será: $l - \hbar$; ahora colocando el nivel sobre la línea A B del eje del anteojo, cuya inclinacion con el horizonte designamos por X; llamando ademas r el radio de curvatura del nivel, tendremos para el estremo A:

(a)....... $\begin{cases} A = l + \hbar - r\, X\, a; \text{ en el estremo mas elevado B se tendrá:} \\ B = l - \hbar - r\, X\, a. \end{cases}$ Si se invierte el nivel, el signo del tercer término de los segundos miembros cambiará i si designamos A′ i B′ las lecturas correspondientes a los estremos A i B, tendremos:

(b)....... $\begin{cases} A' = l + \hbar + r\, X' \\ B' = l - \hbar - r\, X'; \end{cases}$ reemplazando en las fórmulas (a) i (b) a X i X′, por sus valores obtenidos antes se obtiene:

$$(c)\ldots\ldots \begin{cases} A = l + \hbar - r\left(a + \dfrac{b-a}{L}\right) \\ B = l - \hbar + r\left(a + \dfrac{b-a}{L}\right) \\ A' = l + \hbar + r\left(a - \dfrac{b-a}{L}\right) \\ B' = l - \hbar - r\left(a - \dfrac{b-a}{L}\right) \end{cases}$$

Ahora si llamamos u la desigualdad de los soportes del nivel; $u = \dfrac{b-a}{L}$; reemplacemos este valor en (c) i efectuando la multiplicacion indicada, se tendrá finalmente:

(d)......... $\begin{cases} A = l - r\,a + \hbar - r.\,u \\ B = l + r\,a - \hbar + r.\,u \\ A' = l + r\,a + \hbar - r\,u \\ B' = l - r\,a - \hbar + r\,u; \end{cases}$ restemos miembro a miembro las dos primeras ecuaciones i las dos últimas darán:

$$(e) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{B-A}{2} = -\hbar + r\,u + r\,a$$

$$(f) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{A'-B'}{2} = \hbar - r\,u + r\,a,$$ sumando ahora estas dos: $\frac{B-A}{2} + \frac{A'-B'}{2} = 2\,r\,a$ i despejemos a.

$$a = \frac{\frac{B-A}{2} + \frac{A'-B'}{2}}{2\,r.} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{B\;A}{2} + \frac{A'-B'}{2}\right)}{r},$$ si la espresamos en segundos de arco obtendremos:

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{B-A}{2} + \frac{A'-B'}{2}\right)}{r}\,206265,$$ en donde la cantidad $\frac{206265}{r}$, representa el valor de una division del nivel.

De aquí se deduce que, *para obtener la inclinacion del eje de rotacion del anteojo por medio del nivel superior, se debe colocar éste en dos posiciones inversas i leer los dos estremos de la burbuja en cada posicion; se restará de la lectura del lado-círculo, la anotada en el lado opuesto i se dividirá por dos el promedio de los valores obtenidos en ámbas posiciones. El resultado indica la elevacion del eje al lado círculo en partes de la division del nivel; multiplicando este último valor por el valor angular de una de las divisiones del nivel, se obtendrá la elevacion del eje al lado círculo, espresada en segundos de arco.*

Si la lonjitud de la burbuja permaneciera constante, durante la observacion, se tendrá mas simplemente:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{A'-A}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{B-B'}{r}\right);$$ i la inclinacion seria igual a la mitad del movimiento de la burbuja en un estremo determinado i en las dos posiciones del nivel.

Finalmente, si el cero estuviera bien colocado i la lonjitud de los soportes fuera igual, es decir. si $\hbar - r\,u = 0$, no habria necesidad de invertir el nivel, sino colocarlo una sola vez en una posicion i tomar la semi-diferencia de las lecturas hechas en los dos estremos de la burbuja.

Apliquemos ahora la fórmula encontrada:

$$a = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{B-A}{2} + \frac{A'-B'}{2}\right)}{r}\ 206265,$$ a la observacion siguiente:

El dia 21 de Octubre de 1896 se practicaron estas nivelaciones en San Felipe:

Círculo al oeste	Lado del círculo div.	div.	Círculo al este	Lado del círculo	div.
	$B = 5{,}00$	$A = 6{,}5$		$B = 4{,}5$	$A = 7{,}00$
	$A' = 5{,}20$	$B' = 6{,}6$		$A' = 4{,}4$	$B' = 7{,}1$

$$\frac{B-A}{2} = \frac{5-6{,}5}{2} = -\frac{1.5}{2} = -\overset{\text{div.}}{0{,}75} \qquad a\ -\overset{\text{div.}}{1.25}$$

$$\hbar - r\,u = -\overset{\text{div.}}{0{,}1} \quad a \quad \hbar - r\,u = -\overset{\text{div.}}{0{,}1}$$

$$\frac{A'-B'}{2} = \frac{5{,}2-6{,}6}{2} = -\frac{1{,}4}{2} = \overset{\text{div.}}{0{,}70} \qquad -\overset{\text{div.}}{1{,}45}$$

CÍRCULO AL OESTE

$$\frac{B-A}{2} = -\overset{\text{div.}}{0{,}75}$$

$$\frac{A'-B'}{2} = -0{,}70$$

$$\text{suma} = -1.45$$

CÍRCULO AL ESTE

$$\frac{B-A}{2} = -1.25$$

$$\frac{A'-B'}{2} = -1.45$$

$$\text{suma} = -2.70$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{B-A}{2} + \frac{A'-B'}{2}\right) = -\overset{\text{div.}}{0{,}725} \qquad \tfrac{1}{2}\left(\frac{B-A}{2} + \frac{A'-B'}{2}\right) = -\overset{\text{div.}}{1{,}35}$$

el promedio de las dos nivelaciones da: $a = -\overset{\text{div.}}{1.0375}$; como el valor de una division es de 15″, el valor de la inclinacion será:

$$a = 15'' \times 1{,}0375 = 15'',56.$$

En todo lo anterior se supone que la tanjente que pasa por el punto cero del nivel, está en el mismo plano que el eje de rotacion del anteojo. Para obtener esto, se rectifica en primer lugar el nivel, de modo que la tanjente esté en un plano paralelo al eje de rotacion del anteojo, lo que se obtiene cuando $k - r\,u = 0$.

Habiendo practicado algunas nivelaciones, se verá si el valor $k - r\,u$ es cero, en este caso, el nivel cumple esa condicion, en caso contrario se acortará o alargará uno de los soportes por medio del tornillo que al efecto tiene para bajar o levantar, uno de los estremos del nivel. Entónces se tendrá que A = A′ i B = B′, es decir cuando la ampolla de aire ocupe la misma posicion en las dos inversiones.

En este ejemplo habrá que correjir el nivel, puesto que $k - r\,u$, no es cero.

Habiendo rectificado el nivel, la tanjente en el punto cero del nivel, estará en un plano paralelo al eje de rotacion del anteojo. Pero será ademas necesario que esta tanjente esté paralela al eje, es decir, que, ademas de estar en el plano paralelo al eje, su posicion sea tal, que no se cruce con él, o mas bien dicho, esté en el plano que pasa a la vez por el eje i por las estremidades del nivel; luego esta tanjente debe ser paralela al eje de rotacion del anteojo; se reconocerá si esto se verifica, haciendo jirar el nivel, con sus soportes apoyados en los muñones del eje, al rededor de este último i observando si la burbuja de aire permanece en la misma posicion miéntras es visible; si, corre hácia un estremo, es porque éste está mas levantado, i se correjirá por medio del tornillo que da al nivel un movimiento lateral, teniendo presente que al lado que sube la burbuja está mas próximo al observador i que hai que alejar ese lado o acercar el otro.

Cuando, en esta rotacion la burbuja no cambie de posicion, la tanjente en el cero del nivel será paralela al eje de rotacion del anteojo.

DESIGUALDAD DEL DIÁMETRO DE LOS MUÑONES

Lo espuesto anteriormente, se refiere al caso de determinar la inclinacion de una línea matemática, por medio del nivel de aire; como este caso no es el que se presenta en los instrumentos astronómicos, si no que siempre se trata de determinar la inclinacion del eje del anteojo, el que está terminado por dos cilindros i es sobre éstos donde debe descansar el nivel i aun cuando el eje de estos cilindros coincida con el eje matemático, puede suceder que sus diámetros no sean iguales i en este caso, un nivel que descansa sobre ellos, no dará la inclinacion del verdadero eje del anteojo. Se podrá determinar el valor de esta correccion, del modo siguiente:

Como los muñones descansan sobre un cojinete formado por dos planos que forman entre sí un ángulo, que representaremos por *2 i;* si representamos por *2 i'*, el ángulo que forman los planos de los soportes del nivel i por medio de los cuales descansa sobre los muñones del anteojo. Sea r_0 el radio del muñon del lado círculo i r_1 el del muñon del estremo opuesto, tendremos como lo manifiesta la figura 17, que la elevacion del centro del muñon del lado círculo sobre su cojinete será *b o;* pero, en el triángulo o b c, se tiene (fig. 17):

$r\,o = o\,b \operatorname{sen} i;\; o\,b = r.\,o.\,\frac{1}{\operatorname{sen} i} = r\,o \cos i$. En el triángulo *o a d*, tendremos: $r\,o = o\,a \operatorname{sen} i' \quad o\,a = r\,o\,\frac{1}{\operatorname{sen} i'} = r\,o \operatorname{cosec} i'$; luego $a\,b = o\,a + o\,b = r\,o\,(\operatorname{cosec} i' + \operatorname{cosec} i)$.

Para el estremo opuesto del eje, cuyo radio designaremos por r_1 se tendrá igualmente:

$$a'\,b' = r_1\,(\operatorname{cosec} i' + \operatorname{cosec} i).$$

Si la línea *b b'*, determinada por la union de los puntos en que concurren los planos de los dos cojinetes, forma con el horizonte el ángulo X, el nivel indicará esta misma inclinacion, si los diámetros de los muñones son iguales; pero si son desiguales, tendremos para la elevacion b, del cojinete del lado-círculo, llamando L la lonjitud del eje:

$$b = X + \frac{r_0 - r_1}{L} (\operatorname{cosec} i' + \operatorname{cosec} i)$$

Si entonces se invierte el eje sobre sus descansos, de modo que el lado-círculo venga a ocupar el descanso b′, mas bajo, tendremos para el lado- círculo:

$$b' = -X + \frac{r_0 - r_1}{L} (\operatorname{cosec} i' - \operatorname{cosec} i)$$

Sumando esta ecuacion i la anterior:

$$b + b' = 2\frac{r_0 - r_1}{L} (\operatorname{cosec} i' + \operatorname{cosec} i)$$

$$\frac{b' + b}{2} = \frac{r_0 - r_1}{L} (\operatorname{cosec} i' + \operatorname{cosec} i)$$

Este valor permanecerá constante miéntras no varie el diámetro de los muñones.

Como lo que tratamos de determinar con la ayuda del nivel es la inclinacion del eje matemático de los cilindros de los muñones, deberá restarse a cada valor obtenido para la inclinacion b, la cantidad $\frac{r_0 - r}{L}$ cosec i′. Si eliminamos $\frac{r_0 - r_1}{L}$, obtendremos:

$$\frac{\frac{1}{2}(b + b) \operatorname{cosec} i'}{\cos i' + \cos i} = \frac{\frac{1}{2}(b + b') \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} i + \operatorname{sen} i'}$$

Si esta correccion es pequeña, podremos poner $i = i'$ i se tendrá:

$\frac{\frac{1}{2}(b + b') \operatorname{sen} i}{2 \operatorname{sen} i} = \frac{1}{4}(b + b')$; lo que nos indica que a cada nivelacion deberá aplicarse la correccion $-\frac{1}{4}(b + b')$; siendo b i b′ las nivelaciones practicadas en dos posiciones inversas del eje del anteojo.

En lo anterior se supone que las secciones determinadas por un un plano perpendicular al eje de los cilindros de los muñones son completamente circulares. Se reconcerá si en realidad lo son por medio del nivel, que marcará la misma inclinacion del eje, cuando éste se hace jirar sobre sus descansos; si esta condicion se cumple, el anteojo describirá un plano en su rotacion, en caso contrario, describirá una superficie quebrada en zig-zag.

Por medio del nivel se puede determinar tambien la correccion que es necesario hacer a la la nivelacion practicada en una posicion, para obtener las inclinaciones correspondientes a otras posiciones del anteojo, nivelándo el eje en diferentes posiciones, es decir, dando al anteojo diferentes alturas de 10 en 10° o de quince en quince grados i determinando la inclinacion para cada una de esas alturas. Solamente cuando el anteojo esté dirijido al zenit o al nadir, no podrá practicarse la nivelacion,

Si se practica una série de nivelaciones invirtiendo el eje del anteojo sobre sus cojinetes, se puede determinar la desigualdad de diámetro de los muñones o el valor ¼ (b+b′) para las difereutes alturas o distancias zenitales correspondientes a diferentes posiciones del anteojo, comparando estos resultados con los obtenidos para la posicion horizontal, se obtendrán los correciones que es necesario aplicar a cualquiera otra posicion.

Estas correcciones pueden obtenerse gráficamente para cualquier distancia zenital cuando se ha determinado directamente por observaciones de 10 en 10°, por ejemplo. Para esto tomemos dos ejes rectangulares i representaremos por abcisas las distancias zenitales, por ordenadas las correcciones respectivas. Se tomará una escala mayor para las ordenadas, uniendo los puntos por una curva contínua, se tendrá las correcciones por las distancias zenitales no determinadas, tomando en la escala horizontal una distancia proporcional a la altura o distancia zenital observada i trazando la ordenada por el punto determidado, esta dará la correccion.

(*Continuará*)