Las transformaciones de Lorentz son independientes del postulado óptico

Por

RAMON SALAS EDWARDS.

Traducción de la Memoria que aparece en los Annales de la Societé Scientifique de Bruxelles, Tomo XLIII, primera parte, Documents et comptes rendues, pág. 344. Sesión del 29 y 30 de Abril de 1924. Segunda Sección.

Se pueden establecer estas ecuaciones fundamentales de la Relatividad sin postular la constancia de la velocidad de la luz e independientemente de toda consideración electro-magnética.

Basta buscar cómo pueden modificarse la duración de los fenómenos adoptados para medir el tiempo y las dimensiones de los sólidos adoptados para medir las longitudes, aceptando que estas modificaciones no pueden depender sino de la velocidad constante con que un sistema de referencia, en el que estos relojes y reglas están en reposo, se traslada respecto a otro sistema en el cual relojes y reglas idénticos están también en reposo relativo, y sometiendo los coeficientes de modificación de las medidas, a la condición de que los resultados de ninguna experiencia permitan distinguir un sistema del otro.

Fuera de la homogeneidad y de la isotropía del espacio y el tiempo, medidos con reglas y relojes de un mismo sistema, que es necesario suponer para que existan coeficientes de modificación y para que estos coeficientes sean independientes de la hora y el lugar y de la orientación de la velocidad relativa de los dos sistemas de comparación, y funciones únicamente del valor constante de esta velocidad, no se invoca, pues, aquí sino uno solo de los postulados fundamentales de la Relatividad: la equivalencia de los diferentes sistemas de comparación.

Como de ordinario, consideraremos dos sistemas de referencia, definidos por triedros de ejes ortogonales respectivamente paralelos 0XYZ, O'X'Y'Z'; elegiremos los ejes X y X' paralelos a la dirección del movimiento relativo de los dos sistemas y supondremos que en los dos sistemas las medidas de las longitudes y del tiempo se efectúan con reglas y relojes que tenderían a indicar la misma longitud y la misma rapidez de marcha a medida que se acercaran hasta coincidir, si se hiciera su comparación en reposo relativo.

Supondremos que de antemano se hubieran distribuído relojes en todos los puntos de cada sistema, a partir de su origen de coordenadas, donde todos estaban marcando la misma hora, transportándolos en línea recta con una velocidad uniforme e infinitesimal; las indicaciones de estos relojes definen, suponiéndo la existencia de una límite, las horas que llamaremos: t y t'.

Supondremos, finalmente, que se haya elegido orígenes de coordenadas que van a coincidir cuando los relojes que se encuentran en ellos indiquen cero: $t=t'=0$

Para medir con las reglas de un sistema la distancia entre dos puntos de un sólido móvil con respecto al sistema, se mide la distancia entre dos puntos del sistema que coincidan con los puntos considerados, cuando los dos relojes del sistema por los cuales estos puntos pasan, marquen la misma hora, y análogamente para medir con los relojes de un sistema el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos que tienen lugar en un punto móvil, se hace la diferencia entre las horas indicadas por los relojes del sistema que se encuentran bajo el punto considerado, cuando los acontecimientos se verifican.

En virtud del postulado de equivalencia, será necesario que la velocidad relativa de ambos sistemas resulte expresada por el mismo número, sea que la mida con los patrones y relojes de un sistema o con los del otro. Sea $+v$ y $-v$ esta velocidad medida en los sistemas O y O', respectivamente.

Designaremos por α, b, γ los tres coeficientes siguientes, funciones únicamente de la velocidad relativa v, e iguales a la unidad, cuando $v=o$:

α, el coeficiente por que hay que multiplicar la medida hecha con reglas del sistema O, de la distancia entre dos puntos del sistema O', situadas en una paralela a X y X', para obtener la medida efectuada con las reglas de O';

β, el coeficiente análogo cuando los puntos están situados sobre una perpendicular a X y X';

γ el coeficiente por el cual hay que multiplicar la medida del lapso de tiempo entre dos acontecimientos que se verifican en el mismo punto de O', hecha con relojes de O, para obtener la medida hecha con el reloj de O,' que hay en ese punto.

Consideraremos un punto material del sistema O', que tiene en el sistema O, cuando el reloj de este sistema que está en coincidencia con él marca la hora

t, las coordenadas x, y, z, medidas con reglas de este sistema O. Cuando el origen O', animado de una velocidad v según las x, con respecto a O, pasa por un reloj que marca la hora t, tiene por coordenadas vt, o, o. Las diferencias $x-vt$, y, z, serían las coordenadas x', y', z', del punto considerado según las medidas hechas con reglas de O; pero designando con estas letras las medidas hechas con reglas del sistema O', se tiene:

$$x' = \alpha\,(x-vt) = \alpha x - \alpha vt$$
$$y' = \beta\, y$$
$$z' = \beta\, z$$

La hora t' que indicará el reloj de este punto del sistema O' cuando el reloj de O, marque ahí la hora t, será la hora que indicará el reloj del origen O' cuando el reloj del sistema O por que pase este origen marque también la hora t; pero corregida de la diferencia de indicación de los dos relojes de O'. Esta diferencia es posible, a pesar de que los dos relojes coinciden con relojes de O que señalen la misma hora, porque puede provenir del transporte hecho de antemano y ya definido. Se puede calcular esta diferencia considerando el reloj transportado como solidario de un sistema más rápido: la diferencia proviene de la variación de γ durante el transporte y conserva constante su valor desde el momento en que cesa este transporte respecto a O'.

La hora que indica el reloj del origen O', cuando pasa por un reloj de O que marca la hora t, será γt, pues indicaba cero cuando coincidía con un reloj de O, que estaba también en cero.

La corrección es $\dfrac{d\gamma}{dv}(x-vt)$, puesto que el incremento del coeficiente γ cuando v aumenta de la velocidad infinitesimal de transporte ϵ, es $\dfrac{d\delta}{dv}\,\epsilon$, y el tiempo medido con los relojes de O, durante el cual es necesario conservar este incremento de velocidad relativa, es el cuociente de la longitud $x-vt$ medida con las reglas de O, a lo largo de la cual hay que transportar el reloj, dividida por dicha velocidad de transporte ϵ.

Por lo tanto:

$$t' = \gamma t + \frac{d\gamma}{dv}(x - vt) = \left(\gamma - v\frac{d\gamma}{dv}\right)t + \frac{d\gamma}{dv}x.$$

Si de las cuatro ecuaciones de transformación, se despeja x, y, z, t, se obtiene:

$$x = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{v}{\alpha\gamma}\frac{d\gamma}{dv}\right)x' + \frac{v}{\gamma}t'$$

$$y = \frac{1}{\beta}y'$$

$$z = \frac{1}{\beta}z'$$

$$t = \frac{1}{\gamma}t' - \frac{1}{\alpha\gamma}\frac{d\gamma}{dv}x'$$

Como por el postulado de equivalencia es necesario que los coeficientes de x', y', z', t', en estas ecuaciones sean los de x, y, z, t en las primeras, salvo el cambio de $+v$ en $-v$ y también de $+\frac{d\gamma}{dv}$ en $-\frac{d\gamma}{dv}$, puesto que γ es función simplemente del valor numérico de v y no se altera con su cambio de signo, se obtiene como condiciones necesarias y suficientes para satisfacer este postulado las tres siguientes:

$$\beta = 1$$
$$\alpha\gamma = 1$$

$$\gamma\frac{d\gamma}{dv} = \frac{1}{\gamma}$$

La ecuación diferencial puede escribirse separando las variables,

$$\frac{dv}{v} = \frac{-\gamma\, d\gamma}{1-\gamma^2}$$

y agregando en la integración del primer miembro $-\log c$ como constante arbitraria, se obtiene:

$$\log \frac{v}{c} = \frac{1}{2} \log \left(1-\gamma^2\right)$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\gamma^2}$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

y también de la segunda condición,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Las ecuaciones de transformación serán, pues, las de Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\, x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Se puede observar que se ha definido la hora por las indicaciones de relojes transportados en línea recta con velocidades infinitesimales uniformes, desde el origen de coordenadas, y que este transporte conduciría a la misma definición de la hora cualquiera que fuera el punto inicial de almacenamiento y comparación de relojes, pues con relación a los relojes de un sistema, la perturbación que sufre otro reloj que se transporta con velocidad relativa infinitesimal, es nula, cualquiera que sea la longitud de transporte, puesto que con el valor obtenido pasa

γ, la derivada $\dfrac{\alpha\gamma}{dv}$ se anula si v se anula.

En realidad, con cuaquiera definición del tiempo que conserve la homogeneidad e isotropía, se llega a las mismas transformaciones, sometiéndolas a la condición de formar grupo.

Si un móvil se mueve con relación a un sistema O con una velocidad, cuya medida con reglas y relojes de O es c, es decir, si:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2dt^2,$$

resulta de la diferenciación de las fórmulas de Lorentz y de la sustitución en esta ecuación, que también:

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = c^2dt'^2,$$

es decir, que ese móvil tendrá una velocidad relativa respecto a cualquier otro sistema, por ejemplo respecto a O', cuya medida con reglas y relojes de este otro sistema también será c.

Así, pues, el postulado de la existencia de una velocidad constante, como es la de la luz, no es necesario para establecer la Relatividad: su existencia es una consecuencia del postulado de equivalencia de dos sistemas animados de traslación uniformes.

La experimentación habría solamente fijado el valor finito de esta velocidad constante.

Viña del Mar (Chile), 11 de Febrero de 1924.