

Método de cálculo de puentes colgantes según Müller-Breslau

por

C. OLAVARRIETA.

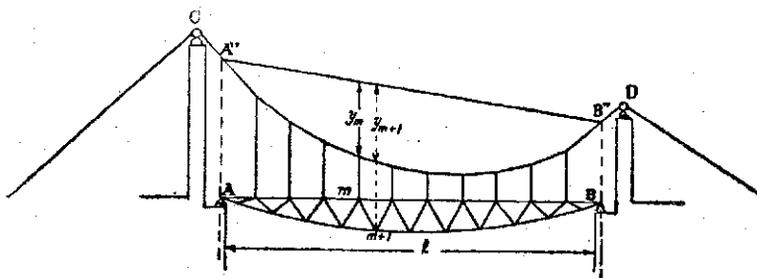


Fig. 1.

Tracción horizontal de la cadena debido a una carga aislada. Uniendo los puntos A'' B'' situados en las verticales de los puntos de apoyo AB por medio de una recta (línea de cierre) y designando por y_m la porción que intercepta la cadena y la línea de cierre sobre la vertical que pasa por un nudo cualquiera m , el momento de flexión referido a ese nudo será:

$$M_m = M_{om} - Hy_m$$

en la que M_{om} es el valor de M_m en el caso de que la viga solicitada por las cargas P no penda de la cadena sino que esté apoyada en A y B. En efecto la viga

transmite al cable por medio de las barras de suspensión (péndolas) ciertas fuerzas, y el cable toma entonces la forma del polígono funicular de estas fuerzas que pasa por los puntos C y D y tiene una flecha máxima determinada. Ahora los momentos de las fuerzas que obran a la izquierda de m es la suma algebraica de los momentos de las cargas P menos el momento de los esfuerzos en las péndolas, el primero es Mom y el segundo es Hym , siendo H la distancia polar.

Este sistema enrejado como se ve es indeterminado en primer grado, bastará encontrar una expresión que nos dé H para tener resuelto el problema, y para ello es necesario recurrir a las ecuaciones de elasticidad.

Para obtener estas ecuaciones, recordaremos que para un sistema enrejado cualquiera se tiene la relación

$$\Sigma \bar{Q}_m \delta m = \Sigma F \Delta l$$

llamado principio de los trabajos virtuales, en la Q_m es una fuerza exterior cualquiera (fuerza o reacción) del enrejado y δm el desplazamiento que experimenta el punto de aplicación de la fuerza m en la dirección de \bar{Q}_m para un estado de traslaciones, \bar{F} los esfuerzos que soportan las barras cuando sobre el enrejado obran las fuerzas Q_m y Δl las variaciones de longitud de las barras producidas por el sistema de traslaciones. (Véase M y B. págs. 11 a 15).

Para resolver un sistema hiperestático cualquiera es necesario adoptar un sistema base estáticamente determinado, llamado generalmente sistema principal, y considerar tanto las reacciones superfluas y barras superfluas (Véase nota 1) provisionalmente como barras incógnitas X . Según esto el esfuerzo F que realmente se produce en una barra de un enrejado será:

$$F = F_0 - F_1 \times X_1 - F_2 \times X_2 \dots \dots \dots (1)$$

en donde F_0 es el esfuerzo que se produce en la barra del sistema estáticamente determinado, cuando obran las cargas exteriores (tren de fuerzas), es decir se suponen nulos todos los esfuerzos en las barras y reacciones superfluas. Tal estado de carga se llama (Estado $X=0$)

F_1 representa el esfuerzo que se desarrolla en la misma barra para el caso de que las cargas exteriores reales (tren de fuerzas) y las magnitudes incógnitas X_2, X_3, \dots sean nulas y de que la $X_1 = -1$.— (Estado $X_1 = -1$).

De igual manera una reacción cualquiera tendrá por expresión

$$R = R_0 - R_1 X_1 - R_2 X_2 \dots$$

Las expresiones de F y de R son válidas no sólo para las reacciones y barras del sistema base (sistema estáticamente determinado) sino que también para las reacciones y barras superfluas ya que para un esfuerzo X_2 de una barra superflua, se tiene $F_0=0, F_1=0, F_3=0$ etc., y $F_2=1$; luego

$$F = X_2$$

Ahora estableciendo, sucesivamente las condiciones de trabajo ($\sum \bar{Q} \delta_m = \bar{F} \Delta 1$) para los estados de carga sucesivos

$X_1 = -1, X_2 = -1; X_3 = -1$ etc., y para los estados de traslaciones reales, se tiene:

$$L_1 = \sum F_1 \Delta 1, L_2 = \sum F_2 \Delta 1 \text{ etc.} \dots \quad (II)$$

expresando L_1, L_2 , etc., los trabajos virtuales de las reacciones R_1, R_2 , etc.

El número de ecuaciones (II) es igual al número de valores estáticamente indeterminados (X); introduciendo el valor:

$$\Delta 1 = \frac{F}{E} \frac{1}{S} + \epsilon t 1$$

Reemplazando \bar{F} por su valor obtenido de la ecuación (1) y poniendo

$\frac{1}{E S} = \rho$ se llega a las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} L_1 - \sum F_1 \epsilon t 1 &= \sum F_0 F_1 \rho - X_1 \sum F_1^2 \rho - X_2 \sum F_1 F_2 \rho \dots \\ L_2 - \sum F_2 \epsilon t 1 &= \sum F_0 F_2 \rho - X_1 \sum F_1 F_2 \rho - X_2 \sum F_2^2 \rho \dots \end{aligned} \right\} \quad III$$

En donde las expresiones de suma se extienden a todas las barras del sistema, es decir tanto a las superfluas como a las necesarias.

Planteando, ahora, la condición de trabajo para el estado de carga $X = 0$ y para los estados de traslaciones $X_1 = -1$, suponiendo que las reacciones no efectúan trabajo, obtendremos:

$$\sum P_m \delta_{m1} = \sum F_o \Delta l_1,$$

donde δ_{m1} y Δl_1 , representan las traslaciones que experimentan las fuerzas P_m y F_o en su dirección cuando sobre el enrejado actúa la carga $X_1 = -1$.

Por otra parte: $\Delta l_1 = F_1 \rho.$

Luego $\sum P_m \delta_{m1} = \sum F_o F_1 \rho$

Planteando las mismas ecuaciones para los estados de traslación $X_2 = -1$ etc., se obtendrán ecuaciones de la forma:

$$\sum P_m \delta_{m2} = \sum F_o F_2 \rho$$

y luego las ecuaciones III quedan:

$$L_1 - \sum F_1 \epsilon t l = \sum P_m \delta_{m1} - X_1 \sum F_1^2 \rho - X_2 \sum F_1 F_2 \rho \dots\dots\dots$$

$$L_2 - \sum F_2 \epsilon t l = \sum P_m \delta_{m2} - X_1 \sum F_1 F_2 \rho - X_2 \sum F_2^2 \rho \dots\dots\dots$$

llamadas ecuaciones de elasticidad. Estas ecuaciones conviene escribirlas en la forma-

$$\left. \begin{aligned} X_1 \sum F_1^2 \rho + X_2 \sum F_1 F_2 \rho \dots\dots\dots &= \sum P_m \delta_{m1} + \sum F_1 \epsilon t l - L_1 - \\ X_1 \sum F_1 F_2 \rho + X_2 \sum F_2^2 \rho \dots\dots\dots &= \sum P_m \delta_{m2} + \sum F_2 \epsilon t l - L_2 - \end{aligned} \right\} \text{IV}$$

y al aplicarlas considerar separadamente la influencia de una carga P de una variación de temperatura t y de una traslación de los apoyos L_1 . Por ejemplo: para un sistema indeterminado en primer grado; caso de los puentes colgantes con viga atiesadora simplemente apoyada se tendrán las siguientes ecuaciones I.

$$\begin{aligned} F &= F_0 - F_1 X_1 \\ R &= R_0 - R_1 X_1 \end{aligned}$$

Los valores de F_0 , R_0 y F_1 , R_1 se calculan por los métodos corrientes de los sistemas estáticamente determinados, ya que F_1 y R_1 son los esfuerzos y reacciones para el estado de carga $X_1 = -1$ del sistema estáticamente determinado. Luego nos falta calcular X_1 y para ello emplearemos la ecuación de elasticidad

$$X_1 \Sigma F_1^2 \rho = \Sigma P_m \delta_{m1} + \Sigma F_1 \epsilon t l - L_1.$$

O bien, como se dijo, suponer las acciones separadamente y se tendrá para la influencia de una carga P :

$$X = \frac{P \delta_1}{\Sigma F_1^2 \rho}$$

Para la influencia de una variación de temperatura, t :

$$X_t = \frac{\Sigma F_1 \epsilon t l}{\Sigma F_1^2 \rho}$$

y para una traslación de los apoyos:

$$\Delta l = \frac{L_1}{\Sigma F_1^2 \rho}$$

Los valores X_t y ΔX son fácilmente calculables ya que F_1 son los esfuerzos en las barras para el estado de carga $X_1 = -1$ y L_1 es el trabajo virtual de las reacciones para ese mismo estado de cargas.

Para obtener el valor de X es necesario trazar un diagrama de traslaciones para el estado de carga $X = -1$ y para ello es necesario conocer las secciones de las barras aproximadamente o bien la relación que entre esas secciones existe. Como se ve, éste es un trabajo más o menos laborioso según el grado de indeterminabilidad del sistema; por eso siempre se emplean otros métodos más simplificados que paso a exponer.

Trazados de diagramas de traslación.—Para el trazado de estos diagramas comenzaremos por recordar que un polígono cualquiera puede considerarse como un polígono funicular de un sistema de cargas finitas que actúan sobre los vértices del polígono y cuyas direcciones son arbitrarias; pero la dirección de una fuerza no puede coincidir con la dirección de los lados adyacentes del polígono, porque en tal caso la fuerza no sería finita.

Cuando las fuerzas son paralelas se puede demostrar que una fuerza cualquiera P_m vale:

$$P_m = H \left[\frac{\eta_m - \eta_{m+1}}{\lambda_m} \quad \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{\lambda_{m+1}} \right]$$

Siendo H la distancia polar, λ_m la distancia entre las fuerzas y η las distancias de los vértices del polígono a una recta arbitraria AB.

En efecto: de la fig. se deduce que

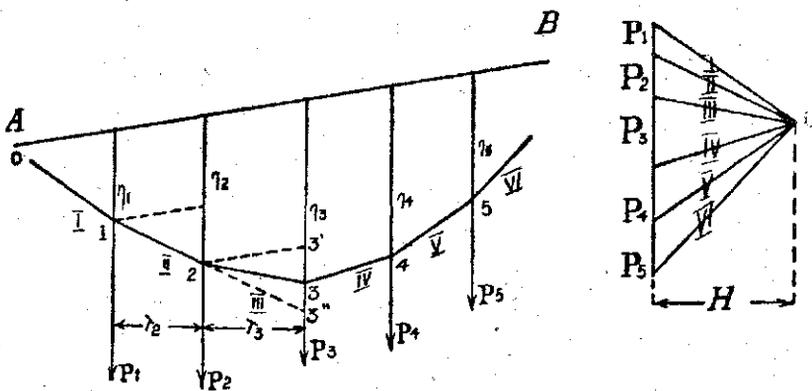


Fig. 2.

$$3''3' = \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_2} \right) \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \quad 33' = \eta_3 - \eta_2$$

Luego:
$$3''3 = 3'3' - 33' = (N_2 - N_1) \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - (N_3 - N_2)$$

Por otra parte:

$$\frac{3''3}{\lambda_3} = \frac{P_2}{H}, \quad 3''3 = \frac{P_2}{H} \lambda_3$$

Que reemplazado arriba da:

$$P_2 = H \left[\frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_2} - \frac{\eta_3 - \eta_2}{\lambda_3} \right]$$

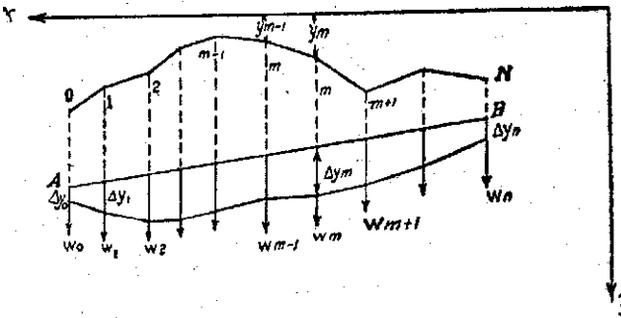


Fig. 3.

Supongamos ahora que tenemos un polígono de barras en un plano vertical referido a un sistema de ejes X, Y y sometido a un sistema de cargas, los vértices de este polígono se trasladarán por las deformaciones, y estas traslaciones se pueden descomponer en una ΔX según el eje de las X y otra ΔY según el eje de las Y; ahora si a partir de una recta arbitraria AB se llevan las cantidades ΔY sobre paralelas el eje de las Y que pasan por los vértices del polígono, se obtiene uniendo los puntos una línea elástica para la dirección Y, y la superficie comprendida entre AB y la línea elástica desde Y₀ hasta Y_m se llama superficie de flexión para la dirección Y. Las fuerzas paralelas al eje de la Y cuyo polígono funicular forma la línea elástica, se pueden obtener, adoptando una distancia polar igual a 1 por la ecuación:

$$\omega_m = \frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}} \quad (1)$$

y trazar su polígono funicular sin considerar ω_0 y ω_n ; para trazar AB es necesario conocer dos traslaciones cualesquiera.

Basados en esas fórmulas podemos encontrar una expresión para los pesos ω que permitan determinar la línea elástica para un enrejado. Supongamos un enrejado cualquiera cuyas barras forman con el eje de las X ángulos mayores o menores que 90° .

Designaremos por ω_m la longitud de una barra del cordón superior opuesta al nudo m del cordón inferior; por u_k la longitud de una barra del cordón inferior que se opone al nudo k del cordón superior; por d_m la longitud de la diagonal ($m-1$), m ; λ_m la proyección de d_m sobre el eje de las X.

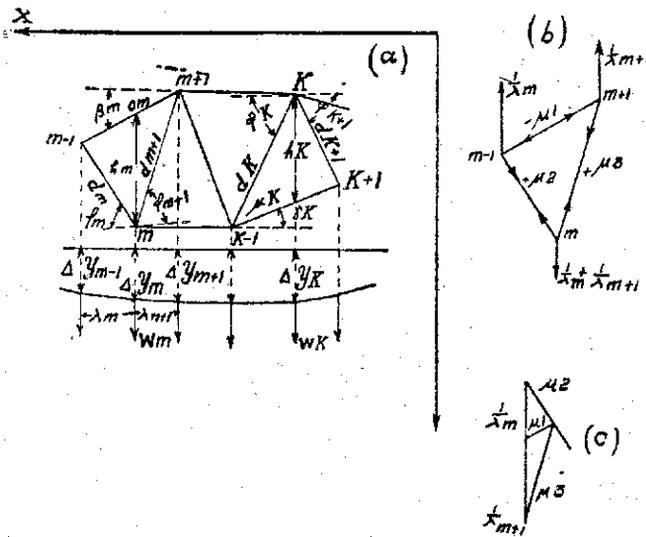


Fig. 4.

Supongamos que el $\Delta (m-1), m, (m+1)$ esté cargado en los puntos ($m-1$) y ($m+1$) con las fuerzas $\frac{1}{\lambda_m}$ y $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ que actúan en el sentido de las ($-Y$), y se encuentre apoyado en el punto m . Apliquemos a este estado de cargas y traslaciones reales la ecuación del trabajo $\Sigma \bar{Q} \delta = \Sigma \bar{F} l \bar{F} \Delta l$ tendremos:

$$\Sigma \bar{Q} \delta = -\frac{1}{\lambda_m} (\Delta y_{m-1} - \Delta y_m) - \frac{1}{\lambda_{m+1}} (\Delta y_{m+1} - \Delta y_m) = \omega_m$$

Sean μ_1, μ_2, μ_3 , los valores absolutos de los esfuerzos desarrollados en las barras por las cargas virtuales. Se tendrá:

$$\omega_m = \sum \bar{F} \Delta l = -\mu_1 \Delta O_m + \mu_2 \Delta d_m + \mu_3 \Delta d_{m+1}$$

El primer término es negativo, porque O_m está comprimido por la fuerza μ_1 ; designando por h_m la altura de la viga en m medida paralelamente al eje de las Y , se tiene

$$\frac{\mu_1}{\lambda_m} = \frac{\lambda_m \sec \beta_m}{h_m} \quad \text{luego } \mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m}$$

de igual manera $\mu_2 = \frac{\sec \phi_m}{h_m}, \quad \mu_3 = \frac{\sec \phi_{m+1}}{h_m}$

Luego

$$\omega_m = \frac{-\Delta O_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \phi_m + \Delta d_{m+1} \sec \phi_{m+1}}{h_m}$$

y de una manera semejante:

$$\omega_k = \frac{+\Delta \mu_k \sec \phi_k - \Delta d_k \sec \phi_k - \Delta d_{k+1} \sec \phi_{k+1}}{h_k}$$

Cuando los valores ΔY se desean trazar a la escala que se dibuja la viga se toma una distancia polar igual a 1 y cuando se desea que resulte a una escala v

veces mayor se adopta igual a $\frac{1}{v}$.

Se comprende que el cálculo de ω efectuado en esta forma sea muy largo; la simplificación que hace Müller Breslau es suponer que las barras de celosía

(diagonales y montantes) estáticamente determinadas no sufran deformación, con lo cual:

$$\omega_m = \frac{\Delta O_m \sec \beta_m}{hm} \quad \text{y} \quad \omega_k = \frac{+\Delta \mu_k \sec \gamma_k}{hk}$$

Los ángulos β, γ se considerarán siempre los ángulos agudos que forman las barras con el eje de las X, pues el signo en este caso no tiene importancia ya que:

$$\text{Sec}(-a) = \text{sec}(+a)$$

Además los valores de ΔO_m y $\Delta \mu_k$ son positivos o negativos según que la barra esté tendida o comprimida.

Ya se vió que para determinar

$$X = \frac{P \delta_1}{\Sigma F_{1\rho}^2}$$

era necesario trazar la elástica ($\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ etc.), para el estado de cargas $X = -1$ y para ello calcular los pesos elásticos ω_m, ω_k .

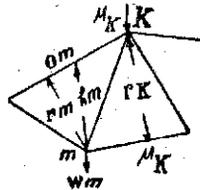


Fig. 5.

Si M'_m es el momento en el nudo m para el estado de cargas $X = -1$ resulta para la barra O_m un esfuerzo:

$$F' F^1 = \frac{M'_m}{r_m}$$

Donde r_m es la longitud de la perpendicular bajada de m a la barra O_m . El signo menos se refiere al cordón superior y el más al inferior. Entonces el peso del nudo m , es denominando por l_m , la longitud de una barra del cordón superior o inferior

$$\omega'_m = \pm \frac{(\Delta l_m)'}{r_m} = \pm \frac{F^1_{mlm}}{E S_m r_m} = \pm \frac{M^1_{mlm}}{E S_m r_m^2}$$

Si hubieran más incógnitas X se tendrían pesos elásticos de la forma:

$$\omega_m^n = \pm \frac{M_m^n l_m}{E S_m S_m r_m^2}$$

de igual manera se puede demostrar que los pesos elásticos para los sistemas enrejados que se indican son los valores que aparecen abajo:

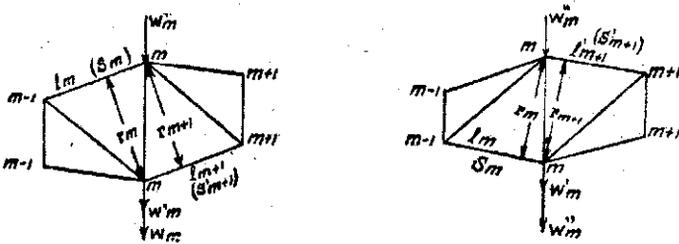


Fig. 6.

$$\omega_m = \pm \frac{M^1_{mlm}}{E S_m r_m^2} + \frac{M^1_{ml'm+1}}{E S'_m + 1 r^2_{m+1}}$$

Este valor se puede obtener por una suma de los pesos ω que actúan en cada extremo del montante:

$$\omega_m = \omega'_m + \omega''_m$$

(Continuará).