

Cálculo de losas cruzadas continuas

Trabajo presentado a las Cuartas Jornadas de Ingeniería Estructural por el Ing. Alex Tripolsky.

f) Exposición del método propuesto por el autor del presente trabajo

La teoría del cálculo de las losas continuas por el método de los grados de empotramiento tratada en la forma expuesta anteriormente, tiene como defecto su poca claridad desde un punto de vista físico; además el cálculo de las rigideces, de los coeficientes de transporte y de los momentos, es sumamente largo, aumentando la posibilidad de errores numéricos en las fórmulas definitivas.

Vamos a intentar ahora tratar el mismo problema en otra forma.

Para entender mejor la idea, plantearemos primero el concepto de los grados de empotramiento aplicado al cálculo de una viga continua.

En la Fig. 14 tenemos una viga continua de cinco tramos, que está cargada en el 3.er tramo.

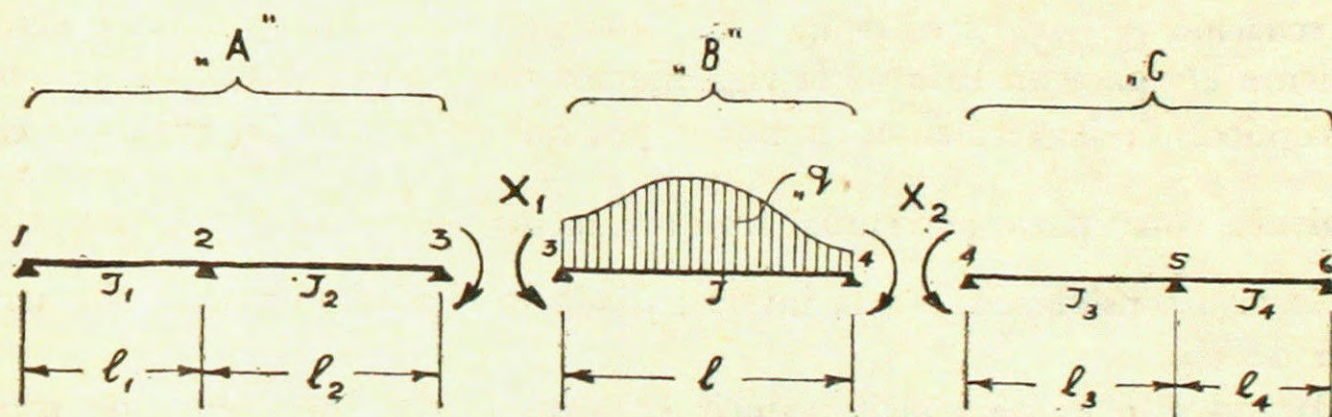


Fig. 14

Estudiemos los valores de los momentos en los apoyos de esta viga.

Tratando este problema por el método de las fuerzas, podemos adoptar como sistema básico el sistema hiperestático formado por los trozos de vigas continuas adyacentes al tramo en estudio que resultan de cortar el sistema en los apoyos 3 y 4 separando así la viga continua en las tres secciones A, B y C.

Para restablecer el equilibrio del sistema aplicaremos en los cortes los momentos desconocidos « X_1 » y « X_2 ».

Escribiendo en la forma corriente las ecuaciones para determinar las incógnicas « X_1 » y « X_2 » se tendrá:

$$\delta_{11}^B X_1 + \delta_{12}^B X_2 + \delta_{10}^B = -\delta_{11}^A X_1 \dots \dots \dots (63)$$

$$\delta_{12}^B X_1 + \delta_{22}^B X_2 + \delta_{20}^B = -\delta_{22}^C X_2 \dots \dots \dots (64)$$

Las ecuaciones (63) y (64) representan la condición de igualdad de las rotaciones en los apoyos de la viga cargada con los correspondientes de los tramos descargados en estos mismos puntos.

Los valores de « δ^B » pueden determinarse fácilmente y dependen solamente de las características elásticas del tramo y de la carga exterior aplicada.

Los « δ_{11}^A » y « δ_{22}^C » son los ángulos de rotación de las vigas continuas «A» y «C» bajo la acción de las cargas $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$ aplicados en los puntos 3 y 4 respectivamente:

Designando por rigidez «S» el valor del momento aplicado en el apoyo que produce una rotación en él igual a la unidad, se puede ver que los « δ_{11}^A » y « δ_{22}^C » corresponden a los valores inversos de los valores «S».

Por lo tanto podemos escribir:

$$\delta_{11}^A = \frac{1}{S^A} \dots \dots \dots (65)$$

$$\delta_{22}^C = \frac{1}{S^C} \dots \dots \dots (66)$$

La definición del grado de empotramiento, como ya vimos, es

$$f = \frac{\Sigma S}{\Sigma S + S_{max}}$$

y despejando « ΣS » se tendrá:

$$\Sigma S = \frac{f}{1-f} S_{max} \dots \dots \dots (67) \quad \text{ó} \quad \Sigma \delta = \frac{1-f}{f} \delta_{min}$$

De la ecuación (67) podemos deducir que tomando un cierto grado de empotramiento «f» para un lado de la viga fijamos con esto exactamente la suma de las rigideces de los elementos contiguos ΣS , que es motivo del grado de empotramiento, como parte porcentual según el factor $\frac{f}{1-f}$ de la rigidez máxima de la viga considerada, o a la inversa; fijada la rigidez ΣS puede obtenerse el valor de «f».

Aclarado esto es muy fácil deducir la fórmula del coeficiente de transporte del momento en función de «f».

Si tenemos una viga (ver Fig. 15) «AB» cuyo lado «B» está cargado con

el momento « M_B », en el lado «A» obtenemos como consecuencia de « f_A » un cierto momento « M_A ».

El grado de empotramiento « f_A » puede ser reemplazado por el efecto de una viga imaginaria «I» (dibujada de puntos) cuya rigidez sea igual a:

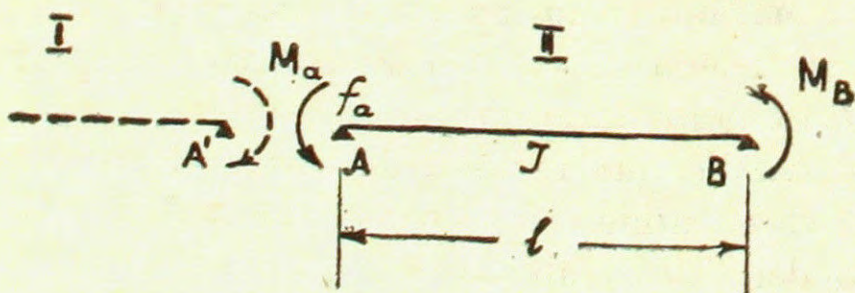


Fig. 15.

$$S_A = \frac{f_A}{1-f_A} \cdot 4 E \frac{I}{l}$$

La deformación angular « δ_{11} » debida a los sectores «I» y «II» sumada valdrá:

$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot l}{3 E I} + \frac{(1 - f_A) l}{4 E I f_A} \quad \text{y} \quad \delta_{10} = - \frac{M_B l}{6 E I}$$

por lo tanto tendremos para « M_A »

$$M_A = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = + \frac{2 f_A}{3 + f_A} M_B \dots \dots \dots (68)$$

El giro del apoyo del lado «B» correspondiente al momento « M_B » será:

$$\varphi_B = + \frac{M_B l}{3 E I} - \frac{2 f_A M_B}{3 + f_A} \cdot \frac{1}{6 E I} = + \frac{M_B l}{(3 + f_A) E I}$$

que para $\varphi_B = 1$ da el valor de $M_B = S_B$

$$S_B = + (3 + f_A) E \frac{l}{I} \dots \dots \dots (69)$$

Volviendo a la definición de los momentos « X_1 » y « X_2 » de las ecuaciones (63) y (64) cuyos coeficientes son:

$$\delta_{11}^B = \delta_{22}^B = \frac{1}{3 E K} \quad \delta_{12}^B = \delta_{21}^B = \frac{1}{6 E K} \quad \text{y en que } K = \frac{I}{l}$$

El ángulo de rotación de la viga simplemente apoyada, para carga exterior expresada en función de los momentos de empotramiento perfecto «C», puede escribirse:

$$\delta_{10}^B = - \frac{2 C_{34} + C_{43}}{6 K} \quad \delta_{20}^B = - \frac{C_{34} + 2 C_{43}}{6 K}$$

y los valores « δ_{11}^A » y « δ_{22}^C » en función de los grados de empotramiento « f_{34} » y « f_{43} » serán:

$$\delta_{11}^A = \frac{(1 - f_{34})}{4 E K f_{34}} \quad \text{y} \quad \delta_{22}^C = \frac{(1 - f_{43})}{4 E K f_{43}}$$

Luego sustituyendo estos valores en las ecuaciones (63) y (64) obtendremos:

$$\left[\frac{1}{3 K} + \frac{(1 - f_{34})}{4 K f_{34}} \right] X_1 + \frac{1}{6 K} X_2 = \frac{2 C_{34} + C_{43}}{6 K} \dots \dots \dots (63_a)$$

$$\frac{1}{6 K} X_1 + \left[\frac{1}{3 K} + \frac{(1 - f_{43})}{4 K f_{43}} \right] X_2 = \frac{C_{34} + 2 C_{43}}{6 K} \dots \dots \dots (64_a)$$

cuya resolución nos dará

$$X_1 = \frac{4 f_{34} \left[C_{34} + \frac{1}{2} C_{43} (1 - f_{43}) \right]}{4 - (1 - f_{34}) (1 - f_{43})} \dots \dots \dots (70)$$

$$X_2 = \frac{4 f_{43} \left[C_{43} + \frac{1}{2} C_{34} (1 - f_{34}) \right]}{4 - (1 - f_{34}) (1 - f_{43})} \dots \dots \dots (71)$$

Las ecuaciones (68), (69), (70) y (71) son las mismas obtenidas por el profesor Hickerson para el caso de las vigas.

Hay que mencionar aquí que el coeficiente de transporte también puede ser obtenido directamente de las ecuaciones (63) y (63a) igualando $X_2 = M_B$ y tomando la carga exterior igual a cero.

Con esto nos evitamos en el caso de la losa tener que seguir un largo desarrollo tal como lo hace Hickerson en el caso de las vigas y podremos obtener de un solo sistema de ecuaciones, del tipo de las (63) y (64) para cada valor de la relación de lados «m», todos los coeficientes que nos interesen: «S», «f» y «C.O.» (coeficiente de transporte) incluyendo también los momentos de borde expresados en función de los «f» y «φ».

La exposición anterior sirve de paso, además, para aclarar la relación que existe entre los coeficientes establecidos por Hickerson en el cálculo de vigas, con los elementos fundamentales definidos en el método general de las fuerzas.

Como podemos ver, la aplicación del método de los grados de empotramiento nos ofrece la posibilidad, tabulando todos los coeficientes, de simplificar mucho el cálculo práctico de estructuras complicadas, cuya frecuencia puede justificarnos el trabajo de tabulación.

Es interesante llamar la atención que los conceptos generales fijados antes y que definen los valores «S», «f» y «C.O.» pueden aplicarse a todas las estructuras rectas, curvas, en el espacio o en el plano, con secciones constantes o variables elásticamente empotrados e indisplicables.

Volviendo al cálculo de losas vamos a aplicar ahora la teoría expuesta anteriormente para el estudio del caso de la losa cuadrada.

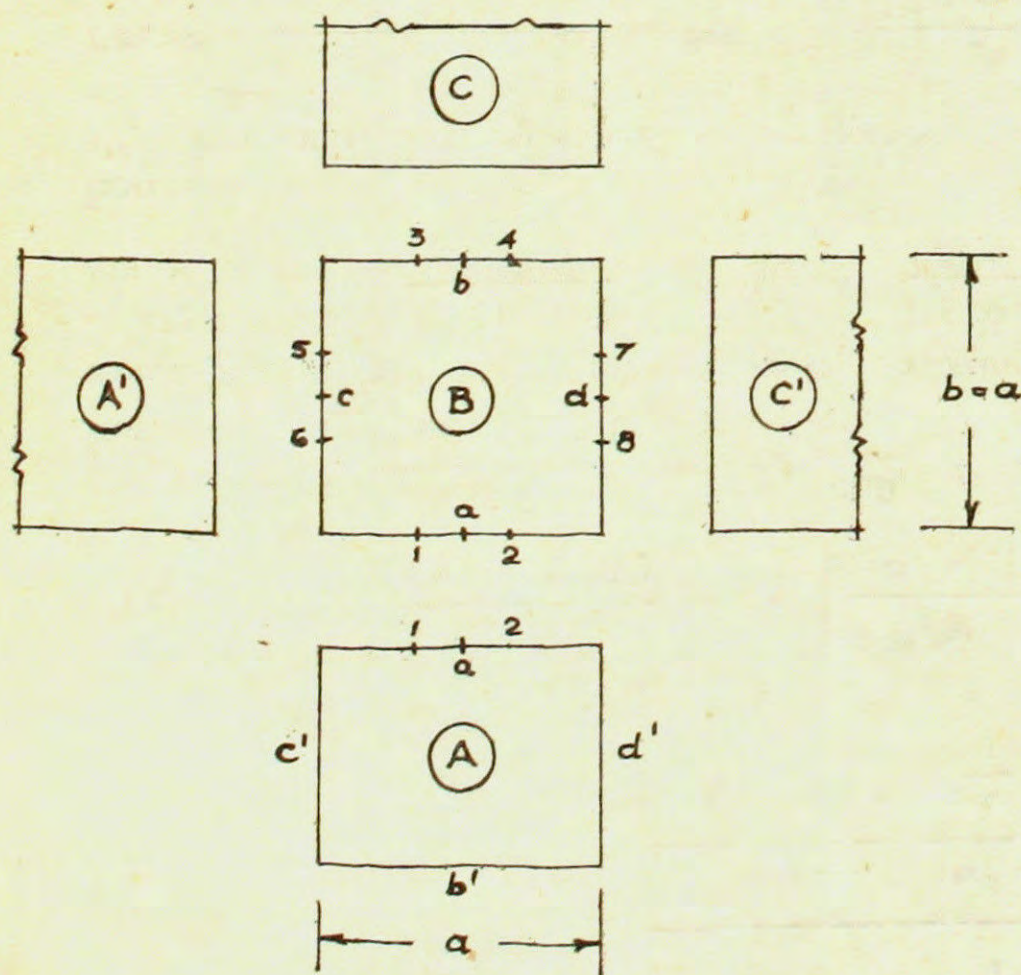


Fig. 16.

En la figura 16 vemos una losa cuadrada «B» rodeada por losas «A», «A'», «C», «C'». Separemos la losa considerada de las vecinas por medio de cortes hechos a lo largo de los apoyos y apliquemos en las separaciones los momentos por determinar M' , M'' y M''' cuya forma y dirección para la losa «B» están definidas según la Fig. 9.

Para las losas vecinas la acción de los momentos se toma en sentido opuesto al de la losa «B».

Considerando las deformaciones angulares del lado «a» de la losa «B» en los puntos (a), (1) y (2) podemos escribir, aprovechando las ecuaciones (15), (16) y (17):

demons escribir, aprovechando las ecuaciones (15), (16) y (17):

Punto (a)

$$+0.980 M_a' + 0.333 M_a''' + 0.186 M_b' + 0.287 M_c' + 0.067 M_c'' - 0.014 M_c''' + \\ + 0.287 M_d' + 0.067 M_d'' - 0.014 M_d''' + \frac{2k\pi}{a} \varphi_a^o = \frac{2k\pi}{a} \varphi_a^B$$

Punto (1)

$$+0.849 M_a' + 0.433 M_a'' + 0.161 M_b' + 0.009 M_b'' + 0.344 M_c' + 0.129 M_c'' - \\ - 0.045 M_c''' + 0.196 M_d' + 0.030 M_d'' - 0.004 M_d''' + \frac{2k\pi}{a} \varphi_1^o = \frac{2k\pi}{a} \varphi_1^B$$

Punto (2)

$$+0.849 M_a' - 0.433 M_a'' + 0.161 M_b' - 0.009 M_b'' + 0.196 M_c' + 0.030 M_c'' - \\ - 0.004 M_c''' + 0.344 M_d' + 0.129 M_d'' - 0.045 M_d''' + \frac{2k\pi}{a} \varphi_2^o = \frac{2k\pi}{a} \varphi_2^B$$

Estas tres ecuaciones son análogas a la parte izquierda de la ecuación (63). Los ángulos φ_a, φ_1 y φ_2 de la losa «B» tienen que ser igual a los de la losa «A» con signo opuesto.

Es decir:

$$\varphi_a^B = - \varphi_a^A$$

$$\varphi_1^B = - \varphi_1^A$$

$$\varphi_2^B = - \varphi_2^A$$

Las deformaciones angulares de la losa «A» tienen la forma siguiente:

$$\varphi_a^A = \varphi_a' M_a' + \varphi_a'' M_a'' + \varphi_a''' M_a''' \dots \dots \dots (72)$$

$$\varphi_1^A = \varphi_1' M_a' + \varphi_1'' M_a'' + \varphi_1''' M_a''' \dots \dots \dots (72_a)$$

$$\varphi_2^A = \varphi_2' M_a' + \varphi_2'' M_a'' + \varphi_2''' M_a''' \dots \dots \dots (72_b)$$

fórmulas en que « φ » representa el ángulo de rotación del borde «a» de la losa «A» que proviene de la acción de momentos unitarios « M_a » en la losa empotrada elásticamente en sus tres lados «b'», «c'» y «d'».

Suponiendo, como ya fue dicho anteriormente, que las deformaciones angulares debidas a la actuación de los momentos unitarios tienen la misma distribución que ellos, el número de los « φ » desconocidos se reduce a tres, ya que

$$\varphi_1' = \varphi_2' = 0.866 \varphi_a' \qquad \varphi_a'' = 0$$

$$\varphi_1'' = - \varphi_2'' \qquad \varphi_1''' = \varphi_2''' = 0$$

Introduciendo el término de rigidez «S» ya definido antes, los tres valores « φ » que quedan pueden expresarse por medio de los valores «S» correspondientes.

$$\varphi_a' = \frac{1}{S'_A} \qquad \varphi_1'' = - \varphi_2'' = \frac{0.866}{S''_A} \qquad \varphi_a''' = \frac{1}{S'''_A}$$

fórmulas en que S', S'' y S''' corresponden a la acción de los momentos según las armónicas: fundamental, segunda y tercera, en el borde «a» de la losa «A».

El hecho de tener tres valores para «S» nos obliga a considerar tres valores para los grados de empotramiento «f» calculados a base las siguientes fórmulas:

$$f_a' = \frac{S'_A}{S'_A + S'_{\max B}} \quad f_a'' = \frac{S''_A}{S''_A + S''_{\max B}} \quad f_a''' = \frac{S'''_A}{S'''_A + S'''_{\max B}}$$

Los factores que influyen en el valor de «S» son tres:

- 1) Espesor de la losa.
- 2) Relación de los lados «m».
- 3) Grados de empotramiento de los lados opuestos.

Analizando estas influencias una a una se puede llegar a la conclusión que la importancia decisiva la tiene solamente el primer factor, el espesor de la losa, que afecta por igual a todos los «S», porque los otros dos sólo afectan en forma sensible el valor de «S'».

Tomando varios valores de «m» (0.50 a 2.0) y varios grados de empotramiento «f» y calculando los «S» se obtiene:

$$S' = \text{de } 1 \cdot \frac{2k\pi}{a} \text{ hasta } 1.568 \frac{2k\pi}{a}$$

$$S'' = \text{de } 2 \cdot \frac{2k\pi}{a} \text{ hasta } 2.262 \frac{2k\pi}{a}$$

$$S''' = \text{de } 3 \cdot \frac{2k\pi}{a} \text{ hasta } 2.810 \frac{2k\pi}{a}$$

y las posibles variaciones de «f» para las losas de igual espesor son:

$$f' = \text{de } 0.389 \text{ hasta } 0.553$$

$$f'' = \text{de } 0.470 \text{ hasta } 0.506$$

$$f''' = \text{de } 0.493 \text{ hasta } 0.516$$

Hay que mencionar aquí que los valores de «f» son calculados tomando en cuenta los valores máximos y mínimos posibles para «S» ($f_b = f_c = f_d = 1$ y $f_b = f_c = f_d = 0$), condiciones que en la práctica no existen, porque los límites prácticos son más estrechos.

Todo lo expresado anteriormente nos permite, sin perjudicar la exactitud del cálculo, limitarnos a un solo valor de «f» calculado a base de la rigidez «S'» y tomarlo igual a «f''» y «f'''» es decir, tomar $f=f'$.

Esta suposición nos simplifica muchísimo el cálculo, limitándonos al estudio de un solo valor de $S=S'$.

El error que se comete con la simplificación antes anotada para «f''» y «f'''» es, en los casos corrientes, de 0.02-0.03; por lo tanto, tomando en cuenta la importancia secundaria de M'' y M''' , estas diferencias casi no afectan los valores definitivos de «M».

Volviendo a nuestro problema y aprovechando la fórmula (67) las ecuaciones (72, 72a, 72b) pueden escribirse:

$$\varphi_a^A = + \frac{1 - f_a}{f_a S'_{\max B}} M_a' + \frac{1 - f_a}{f_a S'''_{\max B}} M_a''' \dots \dots \dots (73)$$

$$\varphi_1^A = + 0.866 \frac{1 - f_a}{f_a S'_{\max B}} M_a' + 0.866 \frac{1 - f_a}{f_a S''_{\max B}} M_a'' \dots \dots \dots (73a)$$

$$\varphi_2^A = + 0.866 \frac{1 - f_a}{f_a S'_{\max B}} M_a' - 0.866 \frac{1 - f_a}{f_a S''_{\max B}} M_a'' \dots \dots \dots (73b)$$

Las ecuaciones (73, 73a, 73b) expresan la deformación de la losa vecina en función del grado de empotramiento de la losa considerada y sus rigideces máximas.

En la misma forma se puede tratar el empotramiento elástico de los bordes «b», «c» y «d» de la losa considerada.

Antes de calcular los valores numéricos de las rigideces máximas hay que analizar un poco más profundamente la superficie elástica de la losa cargada con un cierto momento unitario al borde.

Si nuestros tres puntos de referencia fueran siempre suficientes para definir en forma precisa la distribución de los momentos del borde, las rigideces podrían obtenerse en forma muy sencilla.

La rigidez máxima es la rigidez que corresponde al caso en que los tres lados opuestos al lado considerado están perfectamente empotrados (ver Fig. 17) y el borde «a» está cargado con uno de los momentos unitarios correspondientes a «S'», «S''» ó «S'''» respectivamente.

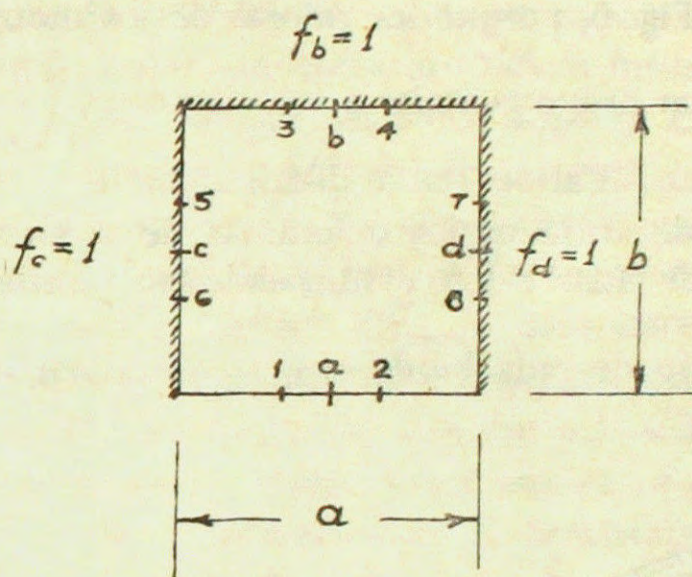


Fig. 17.

Usando las ecuaciones del tipo (18) a (26), haciendo en ellas $\varphi^0=0, \varphi_b=\varphi_c=\varphi_d=0$, se puede reducir el número de las ecuaciones ya que en el caso de onda simétrica (S' y S'') sólo intervendrán los puntos (b), (3), (c), (5), (6) porque $M_b''=0, M_c'=M_d', M_c''=M_d'', M_c'''=M_d'''$ y $M_a'=+1$ ó $M_a'''=+1$.

Para el caso de onda antimétrica (S''') se toman las ecuaciones para los puntos (3), (c), (5), (6) ya que $M_b'=M_b'''=0, M_c'=-M_d', M_c''=-M_d'', M_c'''=-M_d'''$.

Resolviendo estas ecuaciones podremos obtener los valores de los momentos de empotramiento perfecto a lo largo de los bordes «b», «c» y «d».

Si introducimos estos valores en las ecuaciones para $\varphi_a, \varphi_1, \varphi_2$, del tipo (15), (16), (17), se obtendrán los valores de $\varphi_a, \varphi_1, \varphi_2$ que tendrán la forma:

$$\varphi = \text{coef.} \times \frac{a}{2k\pi}$$

Como ya fue explicado anteriormente, los valores de « φ » no siguen exactamente la ley de los momentos aplicados, ya que para hacer la obtención de los valores de « φ » más independientes de la influencia de la deformación según la tercera armónica, se calcularon los «S'» y «S''» a base de las defor-

maciones angulares en los puntos (1) ó (2) donde su influencia es igual a cero.

Entonces S' ó $S'' = 0.866 \frac{2k\pi}{a} \times$. Coeficiente obtenido en los puntos (1) ó (2) para la acción de $M_a' = +1$ ó $M_a'' = +1$.

Solamente para « S''' » se calcula la deformación en el punto «a».

Los puntos en los tercios y en el centro de los lados, donde estudiamos las deformaciones angulares, en el caso de una asimetría del diagrama de momentos muy pronunciada, no son suficientes para definir su ley de variación con bastante exactitud en este caso.

Cualquier carga sobre la losa considerada no puede producir una asimetría en los momentos de apoyos tan fuerte como para hacer notar el error que se introduce por la consideración de sólo tres puntos característicos, pero la cosa cambia fundamentalmente cuando queremos obtener, para ciertos valores de «m», el diagrama exacto de los momentos de empotramiento a lo largo de los lados laterales de la losa cargada con un momento al borde.

Para formarse una idea de lo que pasa, podemos aprovechar las curvas de « M_x » indicadas en la Fig. 6, porque los valores de los momentos a lo largo de los apoyos «c» y «d» son proporcionales a los valores de $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}$ de los mismos puntos, que a su vez son afines con la distribución de los « M_x » según la Fig. 6.

En la Fig. 18 están trazados los diagramas de momentos a lo largo del borde «c» para $m=1.0, 1.20$ y 2.0 y ubicados los puntos que corresponden a los tercios y el centro de cada borde «c», tomando en $m = \frac{b}{a}$ el «a» como constante.

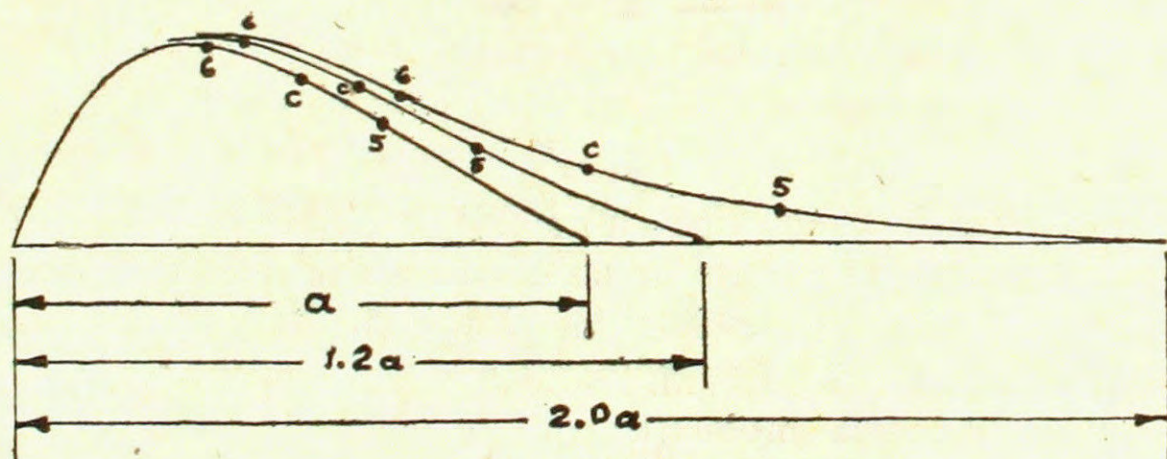


Fig. 18

Como se ve el punto (6) para $b \leq 1.20a$ todavía está en la zona del máximo del diagrama.

Aumentando el «m» el primer punto se desplaza a lo largo del borde más y más fuera del máximo de la deformación angular y los momentos « M' », « M'' » y « M''' » que reemplazan la forma real, obtenidos a base de estas deformaciones, pierden más y más en exactitud.

Para el cálculo de los coeficientes de transporte de los momentos esto no tiene mucha importancia porque nos interesa no el máximo absoluto del momento transportado, sino sólo sus diferentes componentes según las armónicas que se suman después con los momentos de la carga sobre la losa misma, los

cuales casi siempre son más grandes que los momentos transportados por acción de la carga sobre las losas vecinas.

Para el cálculo de la rigidez este efecto no puede despreciarse porque puede llevarnos a una conclusión absurda; ésta es que aumentando fuertemente el valor de «m» se llega a un momento en que la rigidez calculada para la losa simplemente apoyada será igual a la que corresponde a una losa perfectamente empotrada, lo cual proviene de que $M' = M'' = M''' = 0$ (según nuestros puntos de referencia), mientras que el diagrama de momentos real en su parte más importante para la deformación del borde «a» (ver figura 6), a partir de un cierto valor de «m», no sufre más alteración, quedando constante.

Para precisar hasta dónde puede disminuirse el valor de la rigidez vamos a analizar un poco más el cálculo de «S».

La deformación angular del borde «a» puede obtenerse superponiendo la deformación obtenida en la losa simplemente apoyada con las influencias de los momentos en los bordes «c», «d» y «b».

Si calculamos en la forma antes indicada los momentos de empotramiento perfecto en la losa cargada en el borde «a» con el momento $M_a' = +1$ para varios valores de «m» se puede notar que hasta $m = 1.25$ la influencia de los momentos « M_c » y « M_d » sobre la deformación del borde «a» van creciendo, pero a partir de $m > 1.25$ empiezan a disminuir primero lentamente y después en forma más rápida, señalando así que aparte del valor $m = 1.25$ los puntos característicos escogidos ya no reflejan la distribución real de los momentos.

Entonces para obtener la rigidez « S'_{max} » para valores de $m > 1.25$ bastará considerar el valor límite correspondiente a $m = 1.25$ porque para este valor de «m» los momentos del borde «b» ya no influyen más sobre la deformación del borde «a» y los momentos en los bordes «c» y «d» en su parte cercana al borde «a», que es decisiva para la deformación de él, prácticamente no sufren mayor alteración al aumentar el valor de «m».

Para la acción de los momentos $M_a'' = +1$ y $M_a''' = +1$ (S'' y S''') este efecto se produce en forma más rápida que para el momento M_a' (S') ya que para $m > 0.70$ se alcanza el límite en que las rigideces máximas correspondientes ya no varían.

Ahora que el cálculo de las rigideces máximas está aclarado, podremos calcular sus valores numéricos para el caso de la losa cuadrada.

Cargando el borde «a» de la losa con el momento $M_a' = +1$ y resolviendo el sistema de ecuaciones (18), (19), (21), (22) y (23), haciendo en ellas $\varphi^0 = 0$ y $\varphi_b = \varphi_c = \varphi_d = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} M_b' &= -0.0582 & M_c' &= M_d' = -0.2522 \\ M_b''' &= -0.0177 & M_c'' &= M_d'' = -0.1764 \\ & & M_c''' &= M_d''' = +0.0707 \end{aligned}$$

y la deformación del borde «a» en los puntos «1» ó «2» según las ecuaciones (16) o (17) será

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{a}{2k\pi} (+0.849 - 0.161 \times 0.0582 - 0.540 \times 0.2522 - 0.159 \times 0.1764 -$$

$$-0.049 \times 0.0707) = 0.672 \frac{a}{2k\pi}$$

$$y S'_{\max} = \frac{0.866}{0.672} \cdot \frac{2k\pi}{a} = 1.287 \frac{2k\pi}{a}$$

Esta rigidez coincide exactamente con la obtenida anteriormente (ver la fórmula 53).

Para las rigideces «S''» y «S'''» tenemos que usar las ecuaciones de $m=0.70$ porque el mínimo de la rigidez máxima está ya alcanzado para este valor de «m».

Aplicando este mismo procedimiento como para la obtención de «S'» se obtiene

$$\text{para «S''» } \varphi_1 = - \varphi_2 = 0.393 \frac{a}{2k\pi}$$

$$y S''_{\max} = \frac{0.866}{0.393} \cdot \frac{2k\pi}{a} = 2.205 \frac{2k\pi}{a}$$

$$\text{y para «S'''» } \varphi_a = 0.356 \frac{a}{2k\pi}$$

$$y S'''_{\max} = \frac{1}{0.356} \cdot \frac{2k\pi}{a} = 2.810 \frac{2k\pi}{a}$$

Con la rigidez «S'''» se obtiene que la rigidez máxima (con referencia al punto «a») de la losa simplemente apoyada es más grande que para la misma losa con tres lados empotrados.

Este contrasentido es debido a que la onda central del momento aplicado «M'''» produce una rotación angular en el centro del lado «a» casi independiente de las condiciones de apoyos generales y las ondas laterales del momento producen en los lados «c» y «d» momentos de apoyo con el signo positivo aumentando así la deformación del centro del lado «a».

Si introducimos los valores obtenidos para «S'», «S''» y «S'''» en las ecuaciones (73), (73a.), (73b.) podremos obtener:

$$\varphi_a^A = + \frac{1-f_a}{1.287 f_a} \cdot \frac{a}{2k\pi} M'_a + \frac{1-f_a}{2.810 f_a} \cdot \frac{a}{2k\pi} M_a'''$$

$$\varphi_1^A = + \frac{0.866(1-f_a)}{1.287 f_a} \cdot \frac{a}{2k\pi} M_a' + \frac{0.866(1-f_a)}{2.205 f_a} \cdot \frac{a}{2k\pi} M_a''$$

$$\varphi_2^A = + \frac{0.866(1-f_a)}{1.287 f_a} \cdot \frac{a}{2k\pi} M_a' - \frac{0.866(1-f_a)}{2.205 f_a} \cdot \frac{a}{2k\pi} M_a''$$

ó

$$\frac{2k\pi}{a} \varphi_a^A = + 0.777 \frac{1-f_a}{f_a} M_a' + 0.356 \frac{1-f_a}{f_a} M_a''' \dots \dots \dots (74a)$$

$$\frac{2k\pi}{a} \varphi_1^A = + 0.673 \frac{1-f_a}{f_a} M_a' + 0.393 \frac{1-f_a}{f_a} M_a'' \dots \dots \dots (74b)$$

$$\frac{2k\pi}{a} \varphi_2^A = + 0.673 \frac{1-f_a}{f_a} M_a' - 0.393 \frac{1-f_a}{f_a} M_a'' \dots \dots \dots (74c)$$

tomando en cuenta la condición de que

$$\varphi^B = - \varphi^A$$

se pueden escribir en forma definitiva las ecuaciones del lado «a» de la losa cuadrada elásticamente empotrada.

Para el punto «a» se tendrá:

$$\begin{aligned} & \frac{0.777 + 0.203 f_a}{f_a} M_a' + \frac{0.356 - 0.023 f_a}{f_a} M_a''' + 0.186 M_b' + 0.287 M_c' \\ & + 0.067 M_c'' - 0.014 M_c''' + 0.287 M_d' + 0.067 M_d'' - 0.014 M_d''' \\ & + \varphi_a^0 \frac{2 k \pi}{a} = 0 \dots \dots \dots (75a) \end{aligned}$$

Para el punto «1» se tendrá:

$$\begin{aligned} & \frac{0.673 + 0.176 f_a}{f_a} M_a' + \frac{0.393 + 0.040 f_a}{f_a} M_a'' + 0.161 M_b' + 0.009 M_b'' + \\ & + 0.344 M_c' + 0.129 M_c'' - 0.045 M_c''' + 0.196 M_d' + 0.030 M_d'' - \\ & - 0.004 M_d''' + \varphi_1^0 \frac{2 k \pi}{a} = 0 \dots \dots \dots (75b) \end{aligned}$$

Para el punto «2» se tendrá:

$$\begin{aligned} & \frac{0.673 + 0.176 f_a}{f_a} M_a' - \frac{0.393 + 0.040 f_a}{f_a} M_a'' + 0.161 M_b' - 0.009 M_b'' + \\ & + 0.196 M_c' + 0.030 M_c'' - 0.004 M_c''' + 0.344 M_d' + 0.129 M_d'' - \\ & - 0.045 M_d''' + \varphi_2^0 \frac{2 k \pi}{a} = 0 \dots \dots \dots (75c) \end{aligned}$$

En la misma forma se puede escribir las condiciones de empotramiento elástico expresadas en función de los grados de empotramiento « f_b », « f_c », « f_d » para los lados «b», «c» y «d».

La definición del grado de empotramiento según la fórmula $f = \frac{S}{S + S_{\max}}$ dada por Hickerson que hasta ahora fue usada como base para la derivación de fórmulas (68)-(73) tiene inconvenientes de orden práctico que consisten en que para el cálculo de « S_{\max} » se necesita calcular las deformaciones en un sistema hiperestático (viga empotrada en el lado opuesto o losa empotrada en sus tres costados etc.).

Analizando la derivación de fórmulas de Hickerson en la forma que hemos propuesto (ver fórmulas 63-71) podemos fácilmente establecer la validez de la solución del problema para el caso en que expresemos el grado de empotramiento « f » en función de « S_{\min} » en vez de « S_{\max} » del elemento considerado, es decir aceptando para « f » el valor

$$f = \frac{S}{S + S_{\min}} \dots \dots \dots (76)$$

Para el caso de vigas esta suposición modifica la rigidez de la viga adyacente expresándola por la fórmula « $3 E \frac{I}{l}$ » en vez de « $4 E \frac{I}{l}$ ».

Si analizamos las fórmulas (68), (69), (70), (71) para esta nueva definición de « f » obtendremos las siguientes relaciones:

$$M_a = + \frac{f_a}{2} M_B. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68a)$$

$$S = + \frac{12}{4-f_a} E \frac{I}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69a)$$

$$X_1 = \frac{C_{34} (4-f_{43}) + 2 C_{43} (1-f_{43})}{4-f_{34} \cdot f_{43}} f_{34} \quad . \quad . \quad (70a)$$

$$X_2 = \frac{C_{43} (4-f_{34}) + 2 C_{34} (1-f_{34})}{4-f_{34} \cdot f_{43}} f_{43} \quad . \quad . \quad (71a)$$

que muestran una cierta ventaja en comparación con las fórmulas obtenidas por Hickerson.

La expresión del coeficiente de transporte (C.O.) del momento se simplifica en tal forma que ya no necesita tabulación, además las operaciones con « $f_{34} \cdot f_{43}$ » son siempre más fáciles que con « $(1-f_{34})(1-f_{43})$ ».

Haciendo un ejemplo de cálculo usando las fórmulas de Hickerson y las fórmulas (68a.) a (71a.) se puede verificar la absoluta coincidencia entre sí de valores obtenidos en ambos casos.

Para el cálculo de losas esta modificación, que a primera vista parece influir muy poco, acorta en 3 - 4 veces el trabajo de tabulación, sin afectar la exactitud.

La introducción del « S_{\min} » aumenta (con excepción de « f''' » un poco los valores posibles de « f » (anotados anteriormente para las losas de igual espesor) que tienen ahora los valores:

$$f' = \text{de } 0.441 \text{ hasta } 0.611$$

$$f'' = \text{de } 0.495 \text{ hasta } 0.531$$

$$f''' = \text{de } 0.484 \text{ hasta } 0.500$$

sin alterar notablemente, como puede observarse, la diferencia entre los valores extremos.

Introduciendo el término de « S_{\min} » en las ecuaciones (73), (73a.), (73b.) se obtienen los siguientes valores para « φ_a^A », « φ_1^A » y « φ_2^A »:

$$\varphi_a^A = + \frac{1-f_a}{f_a S'_{\min B}} M_a' + \frac{1-f_a}{f_a S'''_{\min B}} M_a'''$$

$$\varphi_1^A = + 0.856 \frac{1-f_a}{f_a S'_{\min B}} M_a' + 0.866 \frac{1-f_a}{f_a S''_{\min B}} M_a''$$

$$\varphi_2^A = + 0.866 \frac{1-f_a}{f_a S'_{\min B}} M_a' - 0.866 \frac{1-f_a}{f_a S''_{\min B}} M_a''$$

Los valores de las rigideces mínimas (S' , S'' , S'''), que corresponden a las de losas simplemente apoyadas en todo su contorno, no necesitan del cálculo especial hecho anteriormente para « S_{\max} » y pueden obtenerse directamente usando tablas 1, 2 y 3 por medio de los coeficientes « a_1' », « a_2'' » y « a_1''' » sabiendo que

$$S'_{\min} = \frac{1}{a_1'} \quad S''_{\min} = \frac{0.866}{a_2''} \quad S'''_{\min} = \frac{1}{a_1'''}$$

Para el caso de la losa cuadrada las rigideces son:

$$S'_{\min} = 1.020 \frac{2k\pi}{a} \quad S''_{\min} = 2.00 \frac{2k\pi}{a} \quad S'''_{\min} = 3.00 \frac{2k\pi}{a}$$

con estos valores de rigideces las ecuaciones (74a.), (74b.) y (74c.) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{2k\pi}{a} \varphi_a^A &= + 0.980 \frac{1-f_a}{f_a} M_a' + 0.333 \frac{1-f_a}{f_a} M_a''' \\ \frac{2k\pi}{a} \varphi_1^A &= + 0.849 \frac{1-f_a}{f_a} M_a' + 0.433 \frac{1-f_a}{f_a} M_a'' \\ \frac{2k\pi}{a} \varphi_2^A &= + 0.849 \frac{1-f_a}{f_a} M_a' - 0.433 \frac{1-f_a}{f_a} M_a'' \end{aligned}$$

y en forma definitiva las ecuaciones (75a.) (75b.), (75c.), se modifican por las fórmulas siguientes:

Para el punto «a»

$$\begin{aligned} + \frac{0.980}{f_a} M_a' + \frac{0.333}{f_a} M_a''' + 0.186 M_b' + 0.287 M_c' + 0.067 M_c'' - \\ - 0.014 M_c''' + 0.287 M_d' + 0.067 M_d'' - 0.014 M_d''' + \varphi_a^o \frac{2k\pi}{a} = 0 \end{aligned}$$

Para el punto «1»

$$\begin{aligned} + \frac{0.849}{f_a} M_a' + \frac{0.433}{f_a} M_a'' + 0.161 M_b' + 0.009 M_b'' + 0.344 M_c' + \\ + 0.129 M_c'' - 0.045 M_c''' + 0.196 M_d' + 0.030 M_d'' - 0.004 M_d''' + \varphi_1^o \frac{2k\pi}{a} = 0 \end{aligned}$$

Para el punto «2»

$$\begin{aligned} + \frac{0.849}{f_a} M_a' - \frac{0.433}{f_a} M_a'' + 0.161 M_b' - 0.009 M_b'' + 0.196 M_c' + \\ + 0.030 M_c'' - 0.004 M_c''' + 0.344 M_d' + 0.129 M_d'' - 0.045 M_d''' + \varphi_2^o \frac{2k\pi}{a} = 0 \end{aligned}$$

etc. para los lados «b», «c» y «d».

En las siguientes páginas están dadas sin entrar en mayores detalles las ecuaciones de este tipo para $m = 0.50; 0.60; 0.70; 0.80; 0.90; 1.00$ que se obtuvieron aplicando el mismo procedimiento.

SISTEMA DE ECUACIONES PARA LA LOSA ELASTICAMENTE EMPOTRADA

$m = \frac{b}{a} = 0,50$

Punto	M_a'	M_a''	M_a'''	M_b'	M_b''	M_b'''	M_e'	M_e''	M_e'''	M_d'	M_d''	M_d'''	φ^o
a	$+\frac{0.794}{f_a}$	0	$+\frac{0.333}{f_a}$	$+\frac{0.310}{f_a}$	0	$+\frac{0.022}{f_a}$	$+\frac{0.068}{f_a}$	$+\frac{0.003}{f_a}$	0	$+\frac{0.068}{f_a}$	$+\frac{0.003}{f_a}$	0	$+\frac{2k\pi}{a}$
1	$+\frac{0.688}{f_a}$	$+\frac{0.424}{f_a}$	0	$+\frac{0.268}{f_a}$	$+\frac{0.080}{f_a}$	0	$+\frac{0.130}{f_a}$	$+\frac{0.016}{f_a}$	$-\frac{0.002}{f_a}$	$+\frac{0.030}{f_a}$	0	0	$+\varphi_1^o$
2	$+\frac{0.688}{f_a}$	$-\frac{0.424}{f_a}$	0	$+\frac{0.268}{f_a}$	$-\frac{0.080}{f_a}$	0	$+\frac{0.030}{f_a}$	0	0	$+\frac{0.130}{f_a}$	$+\frac{0.016}{f_a}$	$-\frac{0.002}{f_a}$	$+\varphi_2^o$
b	$+\frac{0.310}{f_b}$	0	$+\frac{0.022}{f_b}$	$+\frac{0.794}{f_b}$	0	$+\frac{0.333}{f_b}$	$+\frac{0.068}{f_b}$	0	0	$+\frac{0.068}{f_b}$	$-\frac{0.003}{f_b}$	0	$+\varphi_b^o$
3	$+\frac{0.268}{f_b}$	$+\frac{0.080}{f_b}$	0	$+\frac{0.688}{f_b}$	$+\frac{0.424}{f_b}$	0	$+\frac{0.130}{f_b}$	$-\frac{0.016}{f_b}$	$-\frac{0.002}{f_b}$	$+\frac{0.030}{f_b}$	0	0	$+\varphi_3^o$
4	$+\frac{0.268}{f_b}$	$-\frac{0.080}{f_b}$	0	$+\frac{0.688}{f_b}$	$-\frac{0.424}{f_b}$	0	$+\frac{0.030}{f_b}$	0	0	$+\frac{0.130}{f_b}$	$-\frac{0.016}{f_b}$	$-\frac{0.002}{f_b}$	$+\varphi_4^o$
c	$+\frac{0.194}{f_c}$	$+\frac{0.143}{f_c}$	$-\frac{0.072}{f_c}$	$+\frac{0.194}{f_c}$	$+\frac{0.143}{f_c}$	$-\frac{0.072}{f_c}$	$+\frac{0.500}{f_c}$	0	$+\frac{0.167}{f_c}$	$+\frac{0.010}{f_c}$	0	0	$+\varphi_c^o$
5	$+\frac{0.148}{f_c}$	$+\frac{0.097}{f_c}$	$-\frac{0.041}{f_c}$	$+\frac{0.201}{f_c}$	$+\frac{0.172}{f_c}$	$-\frac{0.108}{f_c}$	$+\frac{0.433}{f_c}$	$-\frac{0.216}{f_c}$	0	$+\frac{0.009}{f_c}$	0	0	$+\varphi_5^o$
6	$+\frac{0.201}{f_c}$	$+\frac{0.172}{f_c}$	$-\frac{0.108}{f_c}$	$+\frac{0.148}{f_c}$	$+\frac{0.097}{f_c}$	$-\frac{0.041}{f_c}$	$+\frac{0.433}{f_c}$	$+\frac{0.216}{f_c}$	0	$+\frac{0.009}{f_c}$	0	0	$+\varphi_6^o$
d	$+\frac{0.194}{f_d}$	$-\frac{0.143}{f_d}$	$-\frac{0.072}{f_d}$	$+\frac{0.194}{f_d}$	$-\frac{0.143}{f_d}$	$-\frac{0.072}{f_d}$	$+\frac{0.500}{f_d}$	0	0	$+\frac{0.500}{f_d}$	0	$+\frac{0.167}{f_d}$	$+\varphi_d^o$
7	$+\frac{0.148}{f_d}$	$-\frac{0.097}{f_d}$	$-\frac{0.041}{f_d}$	$+\frac{0.201}{f_d}$	$-\frac{0.172}{f_d}$	$-\frac{0.108}{f_d}$	$+\frac{0.433}{f_d}$	0	0	$+\frac{0.433}{f_d}$	$-\frac{0.216}{f_d}$	0	$+\varphi_a^o$

Punto	M_a'	M_a''	M_a'''	M_b'	M_b''	M_b'''	M_c'	M_c''	M_c'''	M_d'	M_d''	M_d'''	φ^0
a	$+\frac{0.865}{f_a}$	0	$+\frac{0.333}{f_a}$	$+\frac{0.303}{f_a}$	0	$+\frac{0.011}{f_a}$	$+\frac{0.112}{f_a}$	$+\frac{0.008}{f_a}$	0	$+\frac{0.112}{f_a}$	$+\frac{0.008}{f_a}$	0	$+\varphi_a^0$
1	$+\frac{0.749}{f_a}$	$+\frac{0.430}{f_a}$	0	$+\frac{0.262}{f_a}$	$+\frac{0.055}{f_a}$	0	$+\frac{0.183}{f_a}$	$+\frac{0.032}{f_a}$	$-\frac{0.006}{f_a}$	$+\frac{0.059}{f_a}$	$+\frac{0.002}{f_a}$	0	$+\varphi_1^0$
2	$+\frac{0.749}{f_a}$	$-\frac{0.430}{f_a}$	0	$+\frac{0.262}{f_a}$	$-\frac{0.055}{f_a}$	0	$+\frac{0.183}{f_a}$	$+\frac{0.002}{f_a}$	0	$+\frac{0.183}{f_a}$	$+\frac{0.032}{f_a}$	$-\frac{0.006}{f_a}$	$+\varphi_2^0$
b	$+\frac{0.303}{f_b}$	0	$+\frac{0.011}{f_b}$	$+\frac{0.865}{f_b}$	0	$+\frac{0.333}{f_b}$	$+\frac{0.112}{f_b}$	$-\frac{0.008}{f_b}$	0	$+\frac{0.112}{f_b}$	$-\frac{0.008}{f_b}$	0	$+\varphi_b^0$
3	$+\frac{0.262}{f_b}$	$+\frac{0.055}{f_b}$	0	$+\frac{0.749}{f_b}$	$+\frac{0.430}{f_b}$	0	$+\frac{0.183}{f_b}$	$-\frac{0.032}{f_b}$	$-\frac{0.006}{f_b}$	$+\frac{0.059}{f_b}$	$-\frac{0.002}{f_b}$	0	$+\varphi_3^0$
4	$+\frac{0.262}{f_b}$	$-\frac{0.055}{f_b}$	0	$+\frac{0.749}{f_b}$	$-\frac{0.430}{f_b}$	0	$+\frac{0.183}{f_b}$	$-\frac{0.002}{f_b}$	0	$+\frac{0.183}{f_b}$	$-\frac{0.032}{f_b}$	$-\frac{0.006}{f_b}$	$+\varphi_4^0$
c	$+\frac{0.234}{f_c}$	$+\frac{0.133}{f_c}$	$-\frac{0.055}{f_c}$	$+\frac{0.234}{f_c}$	$+\frac{0.133}{f_c}$	$-\frac{0.055}{f_c}$	$+\frac{0.600}{f_c}$	0	$+\frac{0.200}{f_c}$	$+\frac{0.027}{f_c}$	0	0	$+\varphi_c^0$
5	$+\frac{0.180}{f_c}$	$+\frac{0.085}{f_c}$	$-\frac{0.028}{f_c}$	$+\frac{0.242}{f_c}$	$+\frac{0.175}{f_c}$	$-\frac{0.095}{f_c}$	$+\frac{0.520}{f_c}$	$-\frac{0.260}{f_c}$	0	$+\frac{0.023}{f_c}$	0	0	$+\varphi_5^0$
6	$+\frac{0.242}{f_c}$	$+\frac{0.175}{f_c}$	$-\frac{0.095}{f_c}$	$+\frac{0.180}{f_c}$	$+\frac{0.085}{f_c}$	$-\frac{0.028}{f_c}$	$+\frac{0.520}{f_c}$	$+\frac{0.260}{f_c}$	0	$+\frac{0.023}{f_c}$	0	0	$+\varphi_6^0$
d	$+\frac{0.234}{f_d}$	$-\frac{0.133}{f_d}$	$-\frac{0.055}{f_d}$	$+\frac{0.234}{f_d}$	$-\frac{0.133}{f_d}$	$-\frac{0.055}{f_d}$	$+\frac{0.600}{f_d}$	0	0	$+\frac{0.600}{f_d}$	0	$+\frac{0.200}{f_d}$	$+\varphi_d^0$
7	$+\frac{0.180}{f_d}$	$-\frac{0.085}{f_d}$	$-\frac{0.028}{f_d}$	$+\frac{0.242}{f_d}$	$-\frac{0.175}{f_d}$	$-\frac{0.075}{f_d}$	$+\frac{0.520}{f_d}$	0	0	$+\frac{0.520}{f_d}$	$-\frac{0.260}{f_d}$	0	$+\varphi_7^0$
8	$+\frac{0.242}{f_d}$	$-\frac{0.175}{f_d}$	$-\frac{0.095}{f_d}$	$+\frac{0.180}{f_d}$	$-\frac{0.085}{f_d}$	$-\frac{0.028}{f_d}$	$+\frac{0.520}{f_d}$	0	0	$+\frac{0.520}{f_d}$	$+\frac{0.260}{f_d}$	0	$+\varphi_8^0$

SISTEMA DE ECUACIONES PARA LA LOSA ELASTICAMENTE EMPOTRADA

m = — = 0,70

a

Punto	M_a'	M_a''	M_a'''	M_b'	M_b''	M_b'''	M_c'	M_c''	M_c'''	M_d'	M_d''	M_d'''	φ^o
a	$0.914 + \frac{0.792}{f_a}$	0	$0.333 + \frac{0.333}{f_a}$	$0.282 + \frac{0.792}{f_a}$	0	$0.005 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.161 + \frac{0.698}{f_c}$	$0.017 + \frac{0.303}{f_c}$	0	$0.161 + \frac{0.698}{f_d}$	$0.017 + \frac{0.303}{f_d}$	0	$+\varphi_a^o - \frac{2k\pi}{a}$
1	$0.792 + \frac{0.792}{f_a}$	$0.432 + \frac{0.432}{f_a}$	0	$0.244 + \frac{0.792}{f_b}$	$0.036 + \frac{0.432}{f_b}$	0	$0.233 + \frac{0.698}{f_c}$	$0.052 + \frac{0.303}{f_c}$	$-0.012 + \frac{0.233}{f_c}$	$0.093 + \frac{0.698}{f_d}$	$0.005 + \frac{0.303}{f_d}$	0	$+\varphi_1^o$
2	$0.792 + \frac{0.792}{f_a}$	$0.432 - \frac{0.432}{f_a}$	0	$0.244 + \frac{0.792}{f_b}$	$-0.036 + \frac{0.432}{f_b}$	0	$0.093 + \frac{0.698}{f_c}$	$0.005 + \frac{0.303}{f_c}$	0	$0.233 + \frac{0.698}{f_d}$	$0.052 + \frac{0.303}{f_d}$	-0.012	$+\varphi_2^o$
b	$0.282 + \frac{0.792}{f_a}$	0	$0.005 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.914 + \frac{0.792}{f_b}$	0	$0.333 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.161 + \frac{0.698}{f_c}$	$-0.017 + \frac{0.303}{f_c}$	0	$0.161 + \frac{0.698}{f_d}$	$-0.017 + \frac{0.303}{f_d}$	0	$+\varphi_b^o$
3	$0.244 + \frac{0.792}{f_a}$	$0.036 + \frac{0.432}{f_a}$	0	$0.792 + \frac{0.792}{f_b}$	$0.432 + \frac{0.432}{f_b}$	0	$0.233 + \frac{0.698}{f_c}$	$-0.052 + \frac{0.303}{f_c}$	-0.012	$0.093 + \frac{0.698}{f_d}$	$-0.005 + \frac{0.303}{f_d}$	0	$+\varphi_3^o$
4	$0.244 + \frac{0.792}{f_a}$	$-0.036 + \frac{0.432}{f_a}$	0	$0.792 + \frac{0.792}{f_b}$	$0.432 - \frac{0.432}{f_b}$	0	$0.093 + \frac{0.698}{f_c}$	$-0.005 + \frac{0.303}{f_c}$	0	$0.233 + \frac{0.698}{f_d}$	$-0.052 + \frac{0.303}{f_d}$	-0.012	$+\varphi_4^o$
c	$0.264 + \frac{0.792}{f_a}$	$0.117 + \frac{0.432}{f_a}$	$-0.040 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.264 + \frac{0.792}{f_b}$	$0.117 + \frac{0.432}{f_b}$	$-0.040 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.698 + \frac{0.698}{f_c}$	0	$0.233 + \frac{0.233}{f_c}$	$0.055 + \frac{0.698}{f_d}$	0	0	$+\varphi_c^o$
5	$0.193 + \frac{0.792}{f_a}$	$0.070 + \frac{0.432}{f_a}$	$-0.017 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.287 + \frac{0.792}{f_b}$	$0.167 + \frac{0.432}{f_b}$	$-0.081 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.604 + \frac{0.698}{f_c}$	$0.303 + \frac{0.303}{f_c}$	0	$0.047 + \frac{0.698}{f_d}$	0	0	$+\varphi_5^o$
6	$0.287 + \frac{0.792}{f_a}$	$0.167 + \frac{0.432}{f_a}$	$-0.081 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.193 + \frac{0.792}{f_b}$	$0.070 + \frac{0.432}{f_b}$	$-0.017 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.604 + \frac{0.698}{f_c}$	$0.303 + \frac{0.303}{f_c}$	0	$0.047 + \frac{0.698}{f_d}$	0	0	$+\varphi_6^o$
d	$0.264 + \frac{0.792}{f_a}$	$-0.117 + \frac{0.432}{f_a}$	$-0.040 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.264 + \frac{0.792}{f_b}$	$-0.117 + \frac{0.432}{f_b}$	$-0.040 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.055 + \frac{0.698}{f_c}$	0	0	$0.698 + \frac{0.698}{f_d}$	0	$0.233 + \frac{0.233}{f_d}$	$+\varphi_d^o$
7	$0.193 + \frac{0.792}{f_a}$	$-0.070 + \frac{0.432}{f_a}$	$-0.017 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.287 + \frac{0.792}{f_b}$	$-0.167 + \frac{0.432}{f_b}$	$-0.081 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.047 + \frac{0.698}{f_c}$	0	0	$0.604 + \frac{0.698}{f_d}$	$0.303 + \frac{0.303}{f_d}$	0	$+\varphi_7^o$
8	$0.287 + \frac{0.792}{f_a}$	$-0.167 + \frac{0.432}{f_a}$	$-0.081 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.193 + \frac{0.792}{f_b}$	$-0.070 + \frac{0.432}{f_b}$	$-0.017 + \frac{0.333}{f_b}$	$0.047 + \frac{0.698}{f_c}$	0	0	$0.604 + \frac{0.698}{f_d}$	$0.303 + \frac{0.303}{f_d}$	0	$+\varphi_8^o$

Punto	M_a'	M_a''	M_a'''	M_b'	M_b''	M_b'''	M_c'	M_c''	M_c'''	M_d'	M_d''	M_d'''	φ^0
a	$0,946 + \frac{0,946}{f_a}$	0	$0,333 + \frac{0,333}{f_a}$	$+0,253$	0	0	$+0,208$	$+0,031$	-0,003	$+0,208$	$+0,031$	-0,003	$+ \varphi_a^0 + \frac{2k\pi}{a}$
1	$0,819 + \frac{0,819}{f_a}$	$0,433 + \frac{0,433}{f_a}$	0	$+0,219$	$+0,022$	0	$+0,277$	$+0,077$	-0,021	$+0,129$	$+0,011$	0	$+ \varphi_1^0$
2	$0,819 + \frac{0,819}{f_a}$	$0,433 - \frac{0,433}{f_a}$	0	$+0,219$	-0,022	0	$+0,129$	$+0,011$	0	$+0,277$	$+0,077$	-0,021	$+ \varphi_2^0$
b	$+0,253$	0	0	$0,946 + \frac{0,946}{f_b}$	0	$0,333 + \frac{0,333}{f_b}$	$+0,208$	-0,031	-0,003	$+0,208$	-0,031	-0,003	$+ \varphi_b^0$
3	$+0,219$	$+0,022$	0	$0,819 + \frac{0,819}{f_b}$	$0,433 + \frac{0,433}{f_b}$	0	$+0,277$	-0,077	-0,021	$+0,129$	-0,011	0	$+ \varphi_3^0$
4	$+0,219$	-0,022	0	$0,819 + \frac{0,819}{f_b}$	$0,433 - \frac{0,433}{f_b}$	0	$+0,129$	-0,011	0	$+0,277$	-0,077	-0,021	$+ \varphi_4^0$
c	$+0,280$	$+0,100$	-0,027	$+0,280$	$+0,100$	-0,027	$0,795 + \frac{0,795}{f_c}$	0	$0,267 + \frac{0,267}{f_c}$	$+0,091$	0	0	$+ \varphi_c^0$
5	$+0,201$	$+0,054$	-0,011	$+0,315$	$+0,156$	-0,068	$0,688 + \frac{0,688}{f_c}$	$0,346 - \frac{0,346}{f_c}$	0	$+0,079$	0	0	$+ \varphi_5^0$
6	$+0,315$	$+0,156$	-0,068	$+0,201$	$+0,054$	-0,011	$0,688 + \frac{0,688}{f_c}$	$0,346 + \frac{0,346}{f_c}$	0	$+0,079$	0	0	$+ \varphi_6^0$
d	$+0,280$	-0,100	-0,027	$+0,280$	-0,100	-0,027	$+0,091$	0	0	$0,795 + \frac{0,795}{f_d}$	0	$0,267 + \frac{0,267}{f_d}$	$+ \varphi_d^0$
7	$+0,201$	-0,054	-0,011	$+0,315$	-0,156	-0,068	$+0,079$	0	0	$0,688 - \frac{0,688}{f_d}$	$0,346 - \frac{0,346}{f_d}$	0	$+ \varphi_7^0$
8	$+0,315$	-0,156	-0,068	$+0,201$	-0,054	-0,011	$+0,079$	0	0	$0,688 + \frac{0,688}{f_d}$	$0,346 + \frac{0,346}{f_d}$	0	$+ \varphi_8^0$

SISTEMA DE ECUACIONES PARA LA LOSA ELASTICAMENTE EMPOTRADA

$m = \frac{b}{a} = 0,90$

Punto	M_a'	M_a''	M_a'''	M_b'	M_b''	M_b'''	M_c'	M_c''	M_c'''	M_d'	M_d''	M_d'''	φ^0
a	$+\frac{0,966}{f_a}$	0	$+\frac{0,333}{f_a}$	$+\frac{0,219}{f_a}$	0	0	$+\frac{0,251}{f_a}$	$+\frac{0,048}{f_a}$	-0,008	$+\frac{0,251}{f_a}$	$+\frac{0,048}{f_a}$	-0,008	$+\varphi_a^0 = \frac{2k\pi}{a}$
1	$+\frac{0,836}{f_a}$	$+\frac{0,433}{f_a}$	0	$+\frac{0,190}{f_a}$	$+\frac{0,014}{f_a}$	0	$+\frac{0,314}{f_a}$	$+\frac{0,103}{f_a}$	-0,032	$+\frac{0,164}{f_a}$	$+\frac{0,020}{f_a}$	0	$+\varphi_1^0$
2	$+\frac{0,836}{f_a}$	$-\frac{0,433}{f_a}$	0	$+\frac{0,190}{f_a}$	$-\frac{0,014}{f_a}$	0	$+\frac{0,164}{f_a}$	$+\frac{0,020}{f_a}$	0	$+\frac{0,314}{f_a}$	$+\frac{0,103}{f_a}$	-0,032	$+\varphi_2^0$
b	$+\frac{0,219}{f_b}$	0	0	$+\frac{0,966}{f_b}$	0	$+\frac{0,333}{f_b}$	$+\frac{0,251}{f_b}$	-0,048	-0,008	$+\frac{0,251}{f_b}$	-0,048	-0,008	$+\varphi_b^0$
3	$+\frac{0,190}{f_b}$	$+\frac{0,014}{f_b}$	0	$+\frac{0,836}{f_b}$	$+\frac{0,433}{f_b}$	0	$+\frac{0,314}{f_b}$	$-\frac{0,103}{f_b}$	-0,032	$+\frac{0,164}{f_b}$	-0,020	0	$+\varphi_3^0$
4	$+\frac{0,190}{f_b}$	$-\frac{0,014}{f_b}$	0	$+\frac{0,836}{f_b}$	$-\frac{0,433}{f_b}$	0	$+\frac{0,164}{f_b}$	-0,020	0	$+\frac{0,314}{f_b}$	-0,103	-0,032	$+\varphi_4^0$
c	$+\frac{0,289}{f_c}$	$+\frac{0,083}{f_c}$	-0,020	$+\frac{0,289}{f_c}$	$+\frac{0,083}{f_c}$	-0,020	$+\frac{0,889}{f_c}$	0	$+\frac{0,300}{f_c}$	$+\frac{0,137}{f_c}$	0	0	$+\varphi_c^0$
5	$+\frac{0,201}{f_c}$	$+\frac{0,041}{f_c}$	-0,006	$+\frac{0,334}{f_c}$	$+\frac{0,143}{f_c}$	-0,056	$+\frac{0,770}{f_c}$	$-\frac{0,390}{f_c}$	0	$+\frac{0,118}{f_c}$	0	0	$+\varphi_5^0$
6	$+\frac{0,334}{f_c}$	$+\frac{0,143}{f_c}$	-0,056	$+\frac{0,201}{f_c}$	$+\frac{0,041}{f_c}$	-0,006	$+\frac{0,770}{f_c}$	$+\frac{0,390}{f_c}$	0	$+\frac{0,118}{f_c}$	0	0	$+\varphi_6^0$
d	$+\frac{0,289}{f_d}$	-0,083	-0,020	$+\frac{0,289}{f_d}$	-0,083	-0,020	$+\frac{0,137}{f_d}$	0	0	$+\frac{0,889}{f_d}$	0	$+\frac{0,300}{f_d}$	$+\varphi_d^0$
7	$+\frac{0,201}{f_d}$	-0,041	-0,006	$+\frac{0,334}{f_d}$	-0,143	-0,056	$+\frac{0,118}{f_d}$	0	0	$+\frac{0,770}{f_d}$	$-\frac{0,390}{f_d}$	0	$+\varphi_7^0$

Punto	M_a'	M_a''	M_a'''	M_b'	M_b''	M_b'''	M_c'	M_c''	M_c'''	M_d'	M_d''	M_d'''	φ°
a	$+\frac{0.980}{f_a}$	0	$+\frac{0.333}{f_a}$	$+\frac{0.186}{f_a}$	0	0	$+\frac{0.287}{f_a}$	$+\frac{0.067}{f_a}$	-0.014	$+\frac{0.287}{f_a}$	$+\frac{0.067}{f_a}$	-0.014	$+\frac{2k\pi}{a} + \varphi_a^\circ$
1	$+\frac{0.849}{f_a}$	$+\frac{0.433}{f_a}$	0	$+\frac{0.161}{f_a}$	$+\frac{0.009}{f_a}$	0	$+\frac{0.344}{f_a}$	$+\frac{0.129}{f_a}$	-0.045	$+\frac{0.196}{f_a}$	$+\frac{0.030}{f_a}$	-0.004	$+\varphi_1^\circ$
2	$+\frac{0.849}{f_a}$	$+\frac{0.433}{f_a}$	0	$+\frac{0.161}{f_a}$	-0.009	0	$+\frac{0.196}{f_a}$	$+\frac{0.030}{f_a}$	-0.004	$+\frac{0.344}{f_a}$	$+\frac{0.129}{f_a}$	-0.045	$+\varphi_2^\circ$
b	$+\frac{0.186}{f_b}$	0	0	$+\frac{0.980}{f_b}$	0	$+\frac{0.333}{f_b}$	$+\frac{0.287}{f_b}$	-0.067	-0.014	$+\frac{0.287}{f_b}$	-0.067	-0.014	$+\varphi_b^\circ$
3	$+\frac{0.161}{f_b}$	$+\frac{0.009}{f_b}$	0	$+\frac{0.849}{f_b}$	$+\frac{0.433}{f_b}$	0	$+\frac{0.344}{f_b}$	-0.129	-0.045	$+\frac{0.196}{f_b}$	-0.030	-0.004	$+\varphi_3^\circ$
4	$+\frac{0.161}{f_b}$	-0.009	0	$+\frac{0.849}{f_b}$	-0.433	0	$+\frac{0.196}{f_b}$	-0.030	-0.004	$+\frac{0.344}{f_b}$	-0.129	-0.045	$+\varphi_4^\circ$
c	$+\frac{0.287}{f_c}$	$+\frac{0.067}{f_c}$	-0.014	$+\frac{0.287}{f_c}$	$+\frac{0.067}{f_c}$	-0.014	$+\frac{0.980}{f_c}$	0	$+\frac{0.333}{f_c}$	$+\frac{0.186}{f_c}$	0	0	$+\varphi_c^\circ$
5	$+\frac{0.196}{f_c}$	$+\frac{0.030}{f_c}$	-0.004	$+\frac{0.344}{f_c}$	$+\frac{0.129}{f_c}$	-0.045	$+\frac{0.849}{f_c}$	$+\frac{0.433}{f_c}$	0	$+\frac{0.161}{f_c}$	-0.009	0	$+\varphi_5^\circ$
6	$+\frac{0.344}{f_c}$	$+\frac{0.129}{f_c}$	-0.045	$+\frac{0.196}{f_c}$	$+\frac{0.030}{f_c}$	-0.004	$+\frac{0.849}{f_c}$	$+\frac{0.433}{f_c}$	0	$+\frac{0.161}{f_c}$	$+\frac{0.009}{f_c}$	0	$+\varphi_6^\circ$
d	$+\frac{0.287}{f_d}$	-0.067	-0.014	$+\frac{0.287}{f_d}$	-0.067	-0.014	$+\frac{0.186}{f_d}$	0	0	$+\frac{0.980}{f_d}$	0	$+\frac{0.333}{f_d}$	$+\varphi_d^\circ$
7	$+\frac{0.196}{f_d}$	-0.030	-0.004	$+\frac{0.344}{f_d}$	-0.129	-0.045	$+\frac{0.161}{f_d}$	-0.009	0	$+\frac{0.849}{f_d}$	$+\frac{0.433}{f_d}$	0	$+\varphi_7^\circ$
8	$+\frac{0.344}{f_d}$	-0.129	-0.045	$+\frac{0.196}{f_d}$	-0.030	-0.004	$+\frac{0.161}{f_d}$	$+\frac{0.009}{f_d}$	0	$+\frac{0.849}{f_d}$	$+\frac{0.433}{f_d}$	0	$+\varphi_8^\circ$

Los sistemas de ecuaciones obtenidos nos ofrecen la posibilidad, sabiendo los grados de empotramiento y la carga sobre la losa, de determinar los momentos de empotramiento elástico. Además ellos nos sirven también para la tabulación de los coeficientes de transporte de los momentos obtenidos hacia las losas descargadas.

Una vez conocidos los coeficientes de transporte, el cálculo de las rigideces «S» en función de los grados de empotramiento tampoco presenta dificultad alguna.